

トランペット音響管への流体方程式の適用 (その1)

APPLICATION OF FLUID DYNAMICS EQUATION TO THE TRUMPET TUBE

梅谷 征雄
Yukio UMETANI
静岡大学 情報学部
Faculty of Information
Shizuoka University

梅村 忠
Tadashi UMEMURA
静岡大学情報学部
Faculty of Information
Shizuoka University

内容梗概：トランペット音響管の共鳴気柱の特性解析に音波伝播方程式に代わって 圧縮性流体方程式を適用した。有限要素法を用いる計算機シミュレーションによりインパルス応答を求めたところ、移流項の作用により音波伝播を用いる場合に対して基本周波数近辺の応答性が高く出る事が判明した。この傾向は1 m / 秒程度の吹き込み速度に対して既に現れ、速度の2乗のオーダーで増大する。強奏時のシミュレーションにおいて無視できないものと考ええる。

1. はじめに

管楽器の気柱シミュレーションには普通媒質中の音波伝播方程式を用いる ([1],[3],[4]) が、トランペットに代表される金管楽器の場合は唇を通じて直接に息を吹き込むことから、本来は流体方程式の適用が必要と考える。アタックや強奏では相当な流速が生じるので非線型的な効果を生じることがありそうで、また管の形状との関係で部分的には粘性を考慮する必要もあるかもしれない。金管楽器音の忠実な再生のためにはまず音源部分のモデル化が重要であろう ([2],[4],[5],[7]) が、その受け皿として音響管部分の充実も必要と考え、このテーマを取り上げた。本報告では始めに流体方程式による定式化と計算方法を述べ、続いてシミュレーション結果を音波伝播方程式を用いた場合と比較して述べる。

2 流体方程式による定式化

音波伝播方程式は空間2次元の場合次のように定式化される ([9],[10])。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f \quad (1)$$
$$u = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad p = \rho \frac{\partial f}{\partial t}$$

ここで ϕ は速度ポテンシャル、 c は音速、 u 、 v は速度成分、 p は圧力、 ρ は空気密度である。

一方、流体方程式には圧縮性と非圧縮性のものがあるが ([11],[12])、音波伝播と対応を取りやすい圧縮性方程式を用いることとする。空間2次元の場合の圧縮性方程式は次のとおりである。

(質量保存式)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

(運動量保存式)

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (4)$$

(エネルギー保存式)

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} \right) = -\frac{\partial (u p)}{\partial x} - \frac{\partial (v p)}{\partial y} + \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \quad (5)$$

ここで、 $V=(u,v)$ は速度ベクトル $T_{xx}, T_{xy}, T_{yx}, T_{yy}$ は粘性応力テンソル成分で、 μ を粘性係数として、

$$T_{xx} = I \operatorname{div} V + 2m \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$T_{xy} = T_{yx} = m \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$T_{yy} = I \operatorname{div} V + 2m \frac{\partial v}{\partial y}$$

e は全エネルギー、 ϵ は内部 (熱) エネルギーで、 γ を比熱比、 Pr をプラントル数として、

$$R5 = T_{xx} u + T_{yx} v + \frac{gm}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x}$$

$$S5 = T_{xy} u + T_{yy} v + \frac{gm}{Pr} \frac{\partial e}{\partial y}$$

で与えられる。

式 (1) の音波伝播方程式と式 (2) - (5) の圧縮性流体方程式は次のように関連づけられる。式 (3), (4) の運動量保存式の右辺第 1 項は圧力勾配の寄与、第 2, 第 3 項は流れによる寄与、第 4 項以下は粘性による寄与を表しているが、第 2 項以下を省略し、式 (1) の質量保存式の両辺を 1 回時間微分したものと繋げると次の式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \Delta p \quad (6)$$

断熱変化をする理想気体を仮定すると、状態方程式 $p = \rho R T$ (γ : 比熱比、 R : 気体定数、 T : 温度) でかつ標準気圧 p_0 , 標準密度 ρ_0 に対して $p_0 = \rho_0 R T_0$ も成り立つことから、状態方程式を p_0 , ρ_0 の周りで線形近似して、

$$p - p_0 \cong g r_0^{\gamma-1} R T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$= g \frac{r_0^\gamma R T}{r_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (7)$$

$$= g \frac{p_0}{r_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$= g R T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

となる。式 (6) にて p は微分項の中にあるので定数分の差異は許容できて、

$$\Delta p = \Delta (p - p_0) = g R T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = g R T \Delta \mathbf{r}$$

となる。これを式 (6) の右辺に代入して

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = g R T \Delta \mathbf{r} \quad (8)$$

が得られる。あるいは式 (7) の関係を使えば

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = g R T \Delta p \quad (9)$$

である。

一方、式 (1) の両辺を 1 回時間微分して、 $\rho = \rho_0 / t$ の関係を使えば、

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p \quad (10)$$

であり、両者は $c = (R T)^{1/2}$ とおいて一致する。すなわち、圧縮性流体方程式で流れと粘性なしとし、理想気体と断熱変化における圧力と密度の比例関係を仮定した極限が音波伝播方程式と見なせる。

3. トランペット音響管気柱への適用

トランペット音響管は形状の複雑さを避けるためにまずは直管のモデルを使用した。図 1 に管軸を通る断面の形状を示す。



図1 トランペット音響管 (直管) の形状と要素分割

左端が吹口である。吹口の半径は 8.5 mm, ベル開放端の半径が 61.85 mm, 管長は 1371.0 mm で最も細い部分は入口から 12.0 mm の位置で半径 1.9 mm である。これらの寸法は実際の B 管 (YAMAHA 2320E) のものを用いている。円管なので本来は円筒座標系の方程式を使うべきであるが、中心付近の特異性と計算の複雑さを避けるために今回は直交座標系にて断面のシミュレーションを行った。従って管壁の曲率を考慮しない。管壁の曲線を取り入れるために有限要素法により空間の離散化を行

った。図1に要素分割の状況を併せて示す。管軸方向に50分割、管径方向に2分割し、管軸方向を中心に評価した。このほかに、管長は同じで半径を5.0mmに固定した円筒管を取り上げ、これも管軸方向に50、管径方向に2分割した。

圧縮性流体方程式は式(2)から(5)を時間・空間で離散化し、連立させて数値解を時間発展させるが、音波伝播式と対比し易くするためエネルギーに関しては式(5)を使わずに、理想気体、線形近似の可能な断熱変化を仮定して式(7)を使用した。さらに温度一定と仮定した。時間発展に関しては、波動を中心に捉えるために式(1)の両辺を時間微分したものを式(2)、(3)に繋げて、密度に関する移流、粘性項付きの波動方程式(空間2次元の場合

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{I}^2 \mathbf{r}}{\mathcal{I}t^2} &= f(\mathbf{r}, u, v, T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}) \\ &= gRT\Delta t + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}x} \left(\frac{\mathcal{I}(uru)}{\mathcal{I}x} + \frac{\mathcal{I}(vr u)}{\mathcal{I}y} \right) \\ &\quad + \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}y} \left(\frac{\mathcal{I}(urv)}{\mathcal{I}x} + \frac{\mathcal{I}(vr v)}{\mathcal{I}y} \right) \\ &\quad - \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}x} \left(\frac{\mathcal{I}T_{xx}}{\mathcal{I}x} + \frac{\mathcal{I}T_{xy}}{\mathcal{I}y} \right) \\ &\quad - \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}y} \left(\frac{\mathcal{I}T_{xy}}{\mathcal{I}x} + \frac{\mathcal{I}T_{yy}}{\mathcal{I}y} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

を構成し、時間に関して2次の離散化を施して以下のスキームで時間発展させた。

$$\frac{\mathbf{r}^{n+1} - 2\mathbf{r}^n + \mathbf{r}^{n-1}}{(\Delta t)^2} = f(\mathbf{r}^n, u^n, v^n, T_{xx}^n, T_{xy}^n, T_{yy}^n) \quad (12)$$

ここで、 t は時間刻み幅、右肩の n は時刻のインデックスである。空間離散化は三角形要素上の1次基底関数を用いたGalerkin有限要素法([14])にて行い、これにより空間方向も2次精度を確保した。密度と圧力は定数分の自由度があるので、圧力 p は標準圧力を基点にとることとした。式(7)より

$$p^n = gRT(\mathbf{r}^n - \mathbf{r}_0) \quad (13)$$

にて計算する。速度 u, v を求めるには式(1)と、式(2)、(3)の選択の余地があるが、開放端における境界条件 $p=0$ ($p=p_0$)を守るために式(1)を使用した。まずは渦無しの仮定をおいて、運動量のスカラーポテンシャル関数を導入して、Poisson方程式

$$\Delta \Phi^n = \frac{\mathbf{r}^n - \mathbf{r}^{n-1}}{\Delta t} \quad (14)$$

を解いた後、

$$u^n = -\frac{\mathcal{I}\Phi^n}{\mathcal{I}x}, \quad v^n = -\frac{\mathcal{I}\Phi^n}{\mathcal{I}y} \quad (15)$$

により u, v を得た。有限要素法に必要な線形計算はガウス消去法ないし前処理付き共役勾配法([14])を用いて行った。

これらの計算で境界条件を表1のように設定した。密度(圧力)については、開放端で標準値に固定、入口では式(3)、(7)より他の境界値から計算して与え、管壁では式(3)、(4)と運動量ベクトルの方向が管壁に沿い時間的にも変化しないとしてこの条件とした。運動量ポテンシャルについては、管入口で定義に戻って他の境界値から計算し、管壁では運動量ベクトルの方向が壁に沿う事から、出口では流れが無いときの式(1)の p との関係および圧力 p が時間によらず一定であることからこのように設定した。速度ベクトルは、管入口で指定された値をとらせその他の境界では運動量ベクトルと密度から計算した。ただし粘性があるときは管壁で速度ゼロとした。また入口の値は、粘性のあるときポアズイユ流れ([13])に従って分布するとした。

シミュレーションの実施に当たっては、市販されている偏微分ソルバPasilab([15])を使用した。これは通常の流体解析用アプリケーションパッケージとは異なり、解法手順を指定できるソフトである。指定に基きプリプロセッサが、差分法ないし有限要素法による数値計算プログラムを自動生成する。

4. シミュレーション結果

シミュレーションに使用したパラメータ値を表2に示す。ここではMKS単位系で記したが、実際のシミュレーションはmm・Kg・msec単位系で行った。

4.1 音波伝播方程式による結果

クロスチェックのために、式(1)の方程式を用いる場合(音波伝播1)と、式(11)にて右辺の第2項以下を省略した方程式を用いる場合(音波伝播2)の2通りについて試行した。式(1)の離散化は速度ポテンシャルに対して式(12)と同様に行った。音響管については、円筒管とトランペット管の2通りを対象とした。

(1) 円筒管に対する結果

時刻 $t = 3.05 \times 10^{-6}$ 秒 (328 KHz) にて、入力端に初期速度 1 m / 秒で以降 0 となるインパルス入力を与えた時の入口圧力 P_i の時系列応答データ 8192 点をそのままフーリエ変換し、フーリエ係数の絶対値を低周波数から 4 KHz までグラフ化したものを図2に示す。方程式が線形であるのでインパルス応答のフーリエ係数は入力インピーダンスに比例した値となり、流速駆動なので絶対値のピークが管の共鳴周波数を示すはずである。8192 時間ステップは実時間で 24.4 ミリ秒であり音波がこの間に管を約 3 往復する。図2では、音波伝播 1 と 2 で絶対値のピークの位置が一致しており、グラフの傾向も 3 KHz 以下では同じである。これから両計算モデルはほぼ同等の結果を与えると判断できる。理論上、この円筒管(入口閉止、出口開放)の共鳴周波数は

$$f_m = \frac{2m-1}{4l}c = \frac{2m-1}{4l}\sqrt{gRT} \quad (16)$$

であり([9]), $l = 1.37$, $c = 340$ を用いると、1 KHz 以下では 62 Hz, 186 Hz, 310 Hz, 434 Hz, 558 Hz, 682 Hz, 806 Hz, 930 Hz である。一方図2から読み取れる共鳴周波数は 80 Hz, 200 Hz, 320 Hz, 440 Hz, 560 Hz,

680 Hz, 800 Hz, 920 Hz であり、このグラフの周波数分解能が 40 Hz であることを考慮すると許容範囲内にある。

(2) トランペット管に対する結果

円筒管と同じ条件でシミュレーションを行った結果を図3、図4に示す。音波伝播 1、2 で同様な結果となり、両者の同等性が示された。1 KHz 以下の共鳴周波数は(1)と同じく、80 Hz, 200 Hz, 320 Hz, 440 Hz, 560 Hz, 680 Hz, 800 Hz, 920 Hz となり、これはトランペット管の共鳴周波数([4])である 87 Hz, 232 Hz, 341 Hz, 457 Hz, 572 Hz, 686 Hz, 800 Hz, 913 Hz に対して概ね分解能の許容範囲内にある。(1)との違いは共鳴点における値の分布にあり、図2では全周波数にわたって概ねフラットであるのに対し、図3では 680 Hz 周辺に山がありトランペット管の特徴を示している。

4.2 流速と粘性の効果

4.1 にて計算モデルの妥当性を検証できたので、本報告の主題である移流項と粘性項の影響を調査する。4.1 と同様にインパルス入力に対する応答を調べるが、式(3), (4) から判るように移流項は流速に関して非線形であるので、インパルス応答が入力インピーダンスの分布を与える訳ではない。そこで時間領域の応答波形も併せて調査する。入力端の平均圧力 P_i , 開放端から 50 mm 手前の圧力 P_o , および開放端における管軸方向の平均流速 U_o の3つの波形を調査する。また非線型性からインパルスの大きさにより振舞いが異なることが予想されるのでインパルス流速が 1 m / 秒と 10 m / 秒の2通りを調査する。トランペット管のみを対象とする。

(1) 1 m / 秒のインパルスの場合

図3、図4と同様な、入力端圧力 P_i のインパルス応答グラフを図5、図6に示す。粘性なしの場合とありの場合の2通りを示す。図から、粘性なしとありで差異は認められないが、図4に示した音波伝播 2 の結果に対しては両者共通に最低次の共鳴周波数 80 Hz の絶対値が

大きいことが判る。80 Hzの振動は初期インパルスの管端から管端への往復運動に対応するもので、これは移流項の作用により初期インパルスがより長く保たれるためであろう。その様子は図7に示す入力端圧力 P_i の時間軸波形にも現れている。

(2) 10 m / 秒のインパルスの場合

図8、図9に結果を示す。図8は音波伝播2のグラフ、図9は流体方程式に対するグラフである。音波伝播の仮定ではインパルスの強さに比例して値が大きくなるだけで分布は変わらないが、移流項の作用を入れると益々低周波数側に片寄った分布となる。また値もインパルスの2乗に比例して大きくなる。図9からもその様子が判る。図10、図11に時間軸波形を示す。音波伝播のみの場合と流体の場合ではかなり違ったものになっている。

5. おわりに

以上の結果から非線型性の移流項がかなり大きな役割を果たしていることが明らかになった。1 m / 秒の流速は普通にあらわれ、強奏時には10 m / 秒にも近づくであろうから、この寄与を見逃すことは出来ないと考え。なお、このシミュレーションでは粘性項の寄与は余りないとの結果になったが、特に管径方向の要素分割が粗すぎることに原因があることも考えられるので、この件については改めて検討したい。トランペット音の忠実な再現のためには音源の問題を避けては通れないので、唇モデルとの結合を次は検討してみたい。また管壁の曲率を考慮した円筒座標系の使用や管体振動モデルの組み込みも残された課題である。

謝辞

本シミュレーションで使用したトランペット管の寸法データは、愛知県立大学情報科学部の足立整治氏より提供頂いた。お礼申し上げます。

参考文献

- [1] Plitnik, G.R., Strong, W.J.: " Numerical method for calculating input impedances of the oboe", J. Acoust. Soc. Am., 65(3), pp.816-825, 1979
- [2] Fletcher, N.H.: "Excitation Mechanisms in Woodwind and Brass Instruments", ACUSTICA, Vol.43, pp.63-72, 1979
- [3] Schumacher, R.T.: "Ab Initio Calculation of the Oscillation of a Clarinet", ACUSTICA, Vol.48, No.2, pp.71-85, 1981
- [4] Adachi, S., Sato, M.: "Time-domain simulation of sound production in the brass instrument", J. Acoust. Soc. Am. 97(6), pp.3850-3861, 1995
- [5] Adachi, S., Sato, M.: "Trumpet sound simulation using a two-dimensional lip vibration model", J. Acoust. Soc. Am. 99(2), pp.1200-1209, 1996
- [6] 江原史朗, 永井啓之亮, 水谷孝一: "トランペット吹鳴時における人工唇の2次元振動とマウスピース内音圧の測定", 日本音響学会音楽音響研究会資料 MA-98-48, pp.77-82, 1998
- [7] 吉川茂, 実吉純一: "楽器における自励発振機構の解析", 日本音響学会誌 37巻 11号, pp.543-550, 1981
- [8] 井戸川徹: "最近における木管楽器の音響学的研究", 日本音響学会誌 44巻 12号, pp.955-962, 1988
- [9] 早坂寿雄: "楽器の科学", 電子情報通信学会, 1992
- [10] 川村雅恭: "電気音響工学概論", 昭晃堂, 1971
- [11] 数値流体力学編集委員会: "非圧縮性流体解析", 東京大学出版会, 1995
- [12] 数値流体力学編集委員会: "圧縮性流体解析", 東京大学出版会, 1995
- [13] 神部勉: "流体力学", 裳華房, 1995
- [14] 菊地文雄: "有限要素法概説 [新訂版]", サイエンス社, 1999
- [15] 日立超L S Iシステムズ(株): "偏微分方程式数値シミュレーションツールP S I L A B マニュアル", 1995

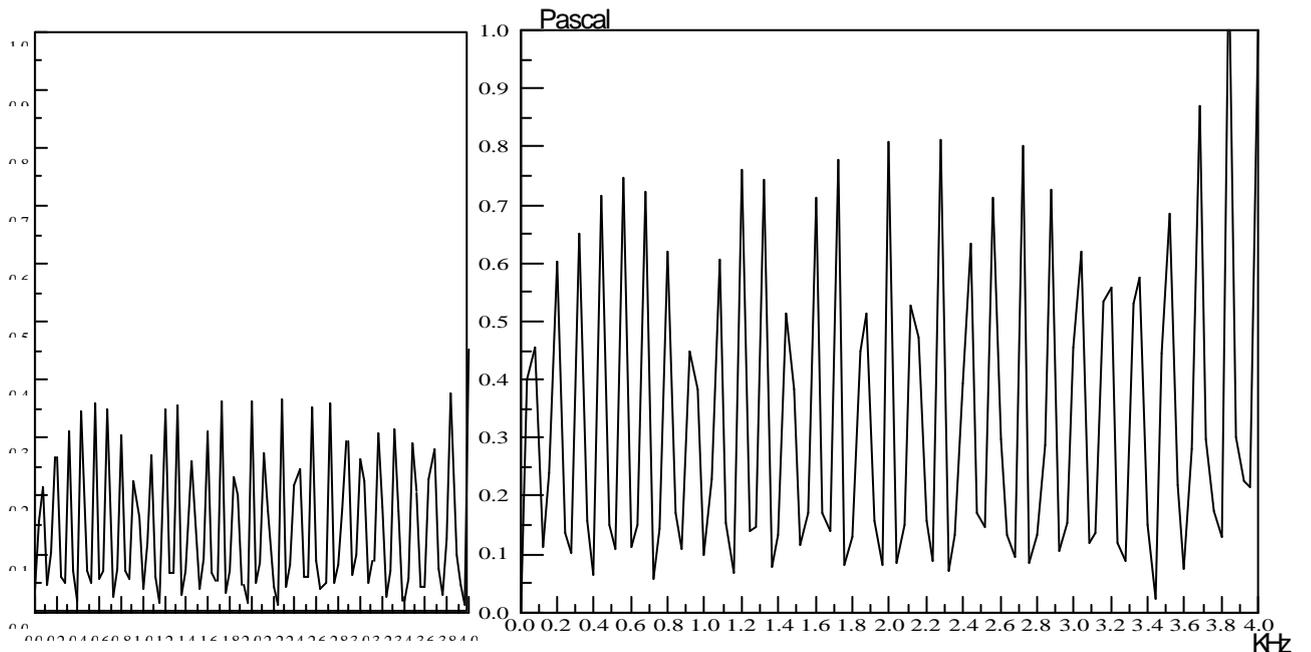
表1 圧縮性流体シミュレーションの境界条件

	管入口	管出口	管壁
密度 ρ	$n \cdot \nabla \rho = ((\dot{\rho} r u) + \text{div}(V \rho u) - \text{div}(T x)) / (gRT)$	$\rho = \rho_0$	$n \cdot \nabla \rho = 0$
運動量ポテンシャル	$n \cdot \nabla \Phi = \rho u$	$\Phi = 0$	$n \cdot \nabla \Phi = 0$
速度 $V=(u,v)$	$u = u_0$ $v = 0$	$V = \frac{-\nabla \Phi}{\rho_0}$	$V = \frac{-\nabla \Phi}{\rho}$ (粘性なし), $V = 0$ (粘性あり)

表2 パラメータ値

(MKS単位)

c	音速	340
μ	空気粘性係数	18.2×10^{-6}
	空気第2粘性係数	-12.1×10^{-6}
ρ	空気密度	1.2
R	気体定数	287
T	温度	288k
	比熱比	1.4



(a) 原式 (音波伝播1)

(b) 流体方程式の簡略版 (音波伝播2)

図2 音波伝播方程式を用いた時の流速インパルス入力に対する入口圧力の応答 (円筒管)

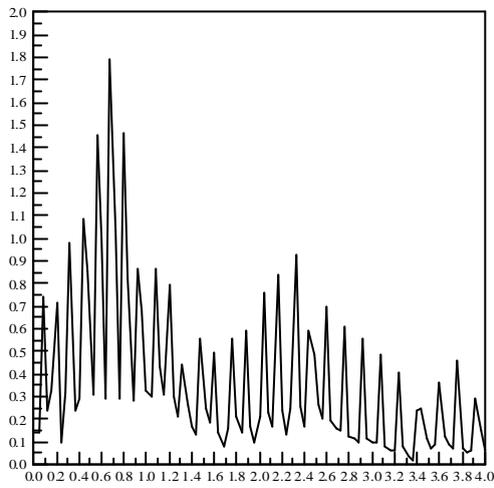


図3 音波伝播1によるインパルス応答(トランペット管)

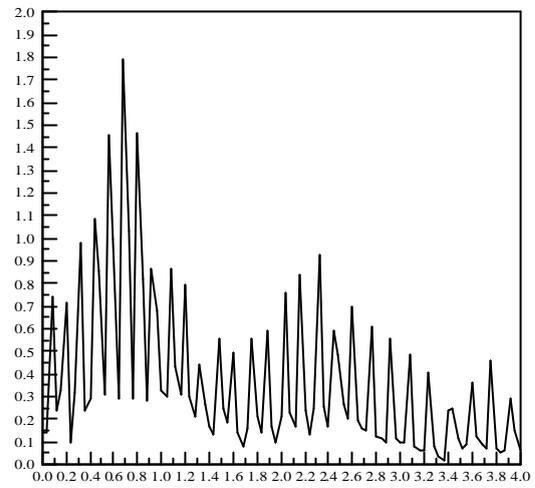


図4 音波伝播2によるインパルス応答(トランペット管)

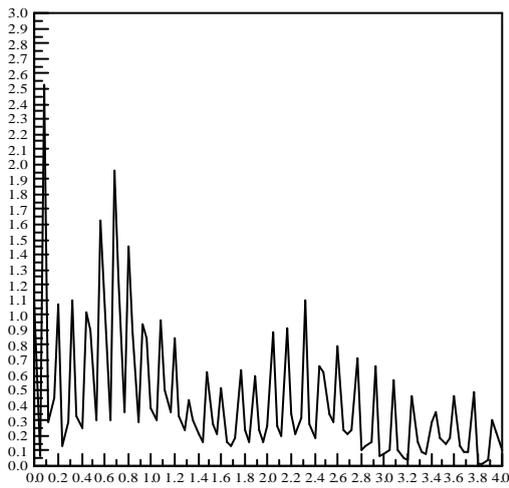


図5 流体方程式によるインパルス応答(粘性なし)

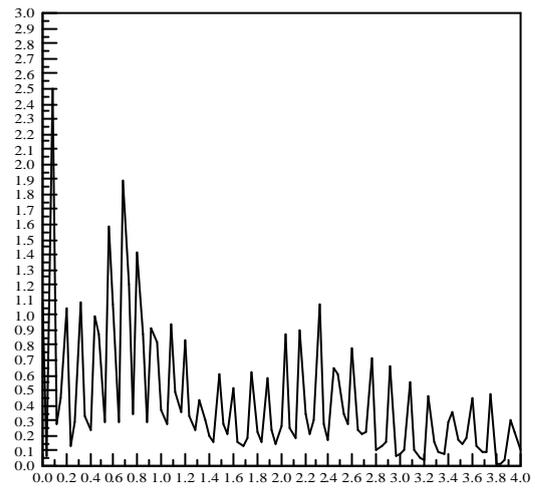


図6 流体方程式によるインパルス応答(粘性あり)

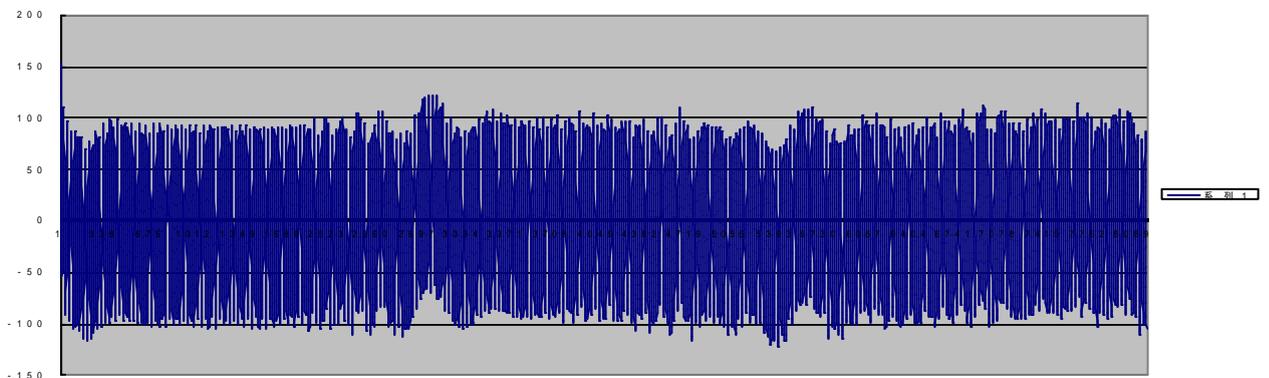


図7 インパルス応答時間軸波形(流体方程式, 粘性あり)

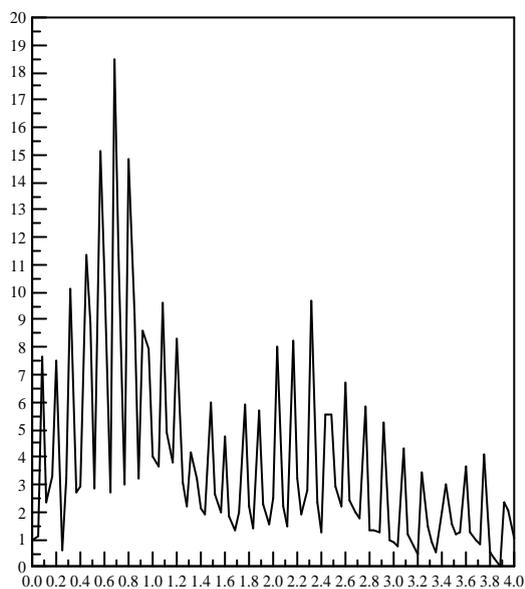


図8 流速1.0倍時のインパルス応答（音波伝播方程式）

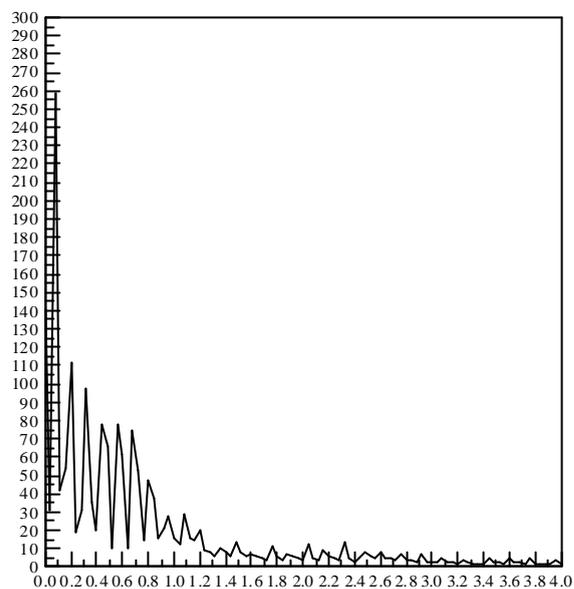


図9 流速1.0倍時のインパルス応答（流体方程式）

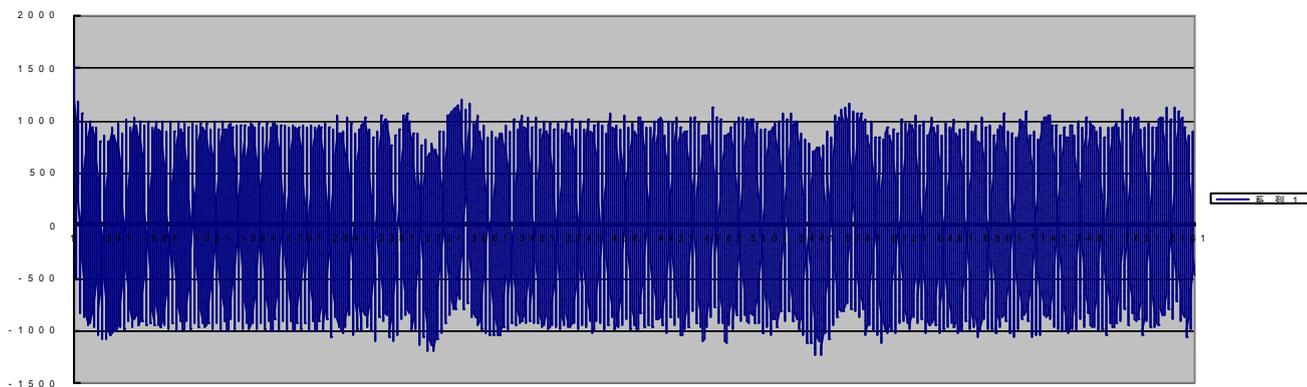


図10 流速1.0倍時のインパルス応答波形（音波伝播方程式）

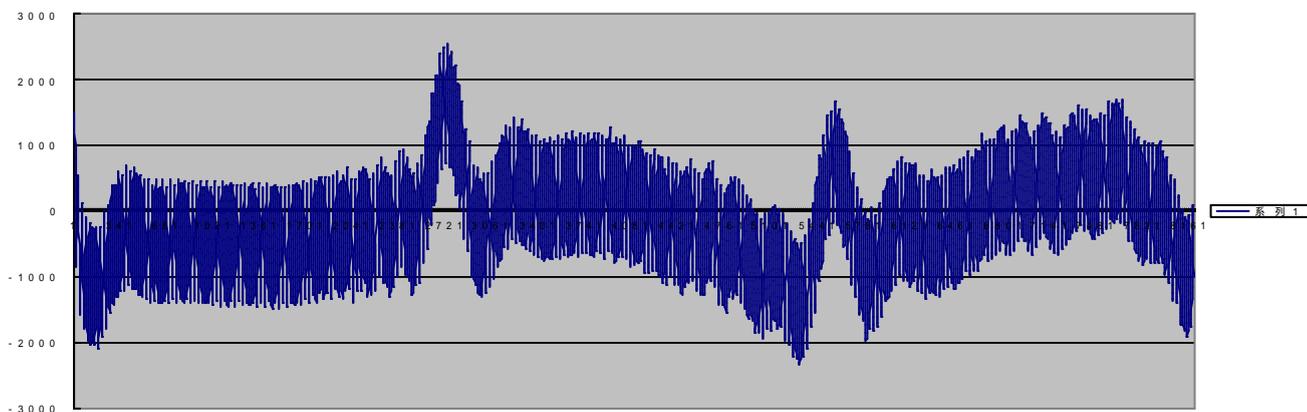


図11 流速1.0倍時のインパルス応答波形（流体方程式）