有限差分法アクリル板シミュレーションにおける固有値補正の試み

The Eigenvalue Adjustment for an Acryl Slab Simulation Using Finite Difference Method

柘植敦司 1), 梅谷征雄 2)
Atsushi TSUGE1), Yukio UMETANI2)
1) 静岡大学大学院情報学研究科情報学専攻　（〒432-8011 浜松市城北 3-5-1, cs8057@cs.inf.shizuoka.ac.jp）
2) 工博　静岡大学教授　情報学部情報科学科　（〒432-8011 浜松市城北 3-5-1, umetani@cs.inf.shizuoka.ac.jp）

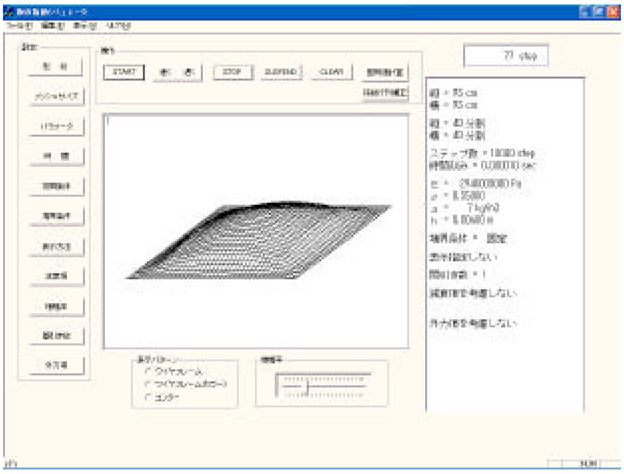
In order to raise the degree of faithfulness of a physical simulation model, comparison with an actual measurement data plays an important role. We added an eigenvalue adjustment function referring an actual measurement data to our finite difference method simulator, and investigated the cause of the difference of the simulation and actual measurement in an acryl slab simulation. Consequently, it became clear that the reason is the difference of the boundary conditions of a simulation model. From this trial, this method is proved to be effective in order to raise the degree of faithfulness of a simulation model.

Keywords: *eigenvalue adjustment, acryl slab, finite difference method simulation*

1. はじめに

物理シミュレーションにおいてそのモデルの忠実度を上げるために、パラメータの感度解析や実測値との対比が重要な役割を占める。

本研究では、既存の有限差分法板振動シミュレータ（図—1）に対して、固有値解析の結果と実測値から固有値を補正するための機能を付加し、アクリル板シミュレーションを対象とし固有値の補正を試み、シミュレーション結果と実測値に差の生じる原因を調査するとともに、その有効性を検討した。



図—1 有限差分法板振動シミュレータ

2. アクリル板シミュレーション

2.1 モデルの作成と解析

有限差分法板振動シミュレータにおいて正方形アクリル板モデルの解析を行った。解析は、板の外周を完全固定しての固有値解析と、固有値解析の結果を利用するモード重ね合わせ法による周波数応答解析を行った。なお、周波数応答解析では 0.1778kgf で板の中央を面に対して垂直方向に加振した。

正方形アクリル板シミュレーションモデル

形状　$6\times935\times935$(mm)

メッシュ分割数　x=40　,　y=40

材料特性　ヤング率　2.94×10^{6}(kg・mm/S^2)

ポアソン比　0.35

密度　1.19×10^{-6}(kg/mm^3)

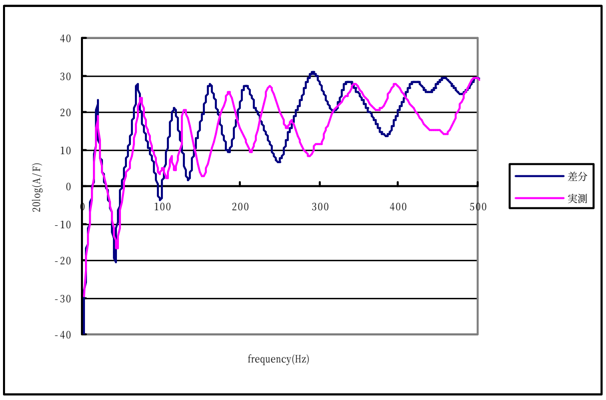
2.2 解析結果と実測値

1〜500Hz までのイナータンス（加速度/力）を図—2 に示す。ここで、イナータンスのピークはアクリル板の固有周波数の一部に対応しており、固有周波数は板振動方程式

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + q_z(x, y, z) \quad (1)$$

を離散化した時の係数行列の固有値から得られる。

周波数応答解析の結果、100Hz までの低周波数域では、シミュレーション結果と実測値はほぼ一致しているが、周波数が高くなるにつれシミュレーション結果と実測値の差は大きくなるという結果になった。



図―2 周波数応答解析結果イナータンス

3. 固有値の補正方法

シミュレーション結果と実測値に差が生じる原因を調べるとともに、より忠実度の高いモデルを作成するために、固有値の補正を次の方法で行う。

λ_1, x_1 を係数行列 A の固有値と固有ベクトル、$\lambda_1(\varepsilon)$, $x_1(\varepsilon)$を行列 $A+\varepsilon B$ の固有値と固有ベクトルとし、

$$l_1(e) = l_1 + k_1 e + k_2 e^2 + \cdots \qquad (2)$$

$$x_1(e) = x_1 + e z_1 + e^2 z_2 + \cdots \qquad (3)$$

と展開すると、

$$k_1 = y_1^T B x_1 / y_1^T x_1 = b_{11} / s_1 \qquad (4)$$

$$z_1 = \frac{b_{21} x_2}{(l_1 - l_2) s_2} + \frac{b_{31} x_3}{(l_1 - l_3) s_3} + \cdots + \frac{b_{n1} x_n}{(l_1 - l_n) s_n} \qquad (5)$$

となる [1]。ここで、 λ_i, $x_i(I=1,\cdots,n)$は A の固有値と対応する固有ベクトル、

λ_i, $y_i(I=1,\cdots,n)$は、A^Tの固有値と固有ベクトル、

$$b_{ij} = y_i^T B x_j = (y_i, B x_j) \qquad (6)$$

$$s_i = y_i^T x_i = (y_i, x_i) \qquad (7)$$

である。

このとき、式(4)を$\lambda_1(\varepsilon)$とλ_1 が与えられたときの、係数行列 B の推定に用いる。すなわち、式(4)より

$$b_{11} = y_1^T B x_1 = k_1 s_1 \qquad (8)$$

k_1 は実測値 $\lambda_1(\varepsilon)$と計算値 λ_1 の差から式(2)を使い求められる。このとき εを$|k_1|<n$, $|\varepsilon|<1$ となるように適当に仮定する。A と A^Tを固有値解析することでλ_1, y_1, x_1 を求められるので

$$s_1 = y_1^T x_1 \qquad (9)$$

も計算できる。したがって式(8)の右辺が計算でき B に関する制約式を 1 本作ることができる。$B=(B_{ij})$は n×n 個の要素を含むので、全部で n×n 本の制約式があれば完全に決定できるが、それは困難であるので b_{ij} の個数を減らす必要がある。

式(8)の左辺を書き下すと、

$$b_{11} = y_1^T B x_1 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} y_{1i} b_{ij} x_{1j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_{1i} x_{1j} b_{ij} \qquad (10)$$

となる。ここで、y_{1i} はベクトル y_1 の第 i 成分、x_{1j} はベクトル x_1 の第 j 成分である。

式(10)より、$|y_{1i}|$, $|x_{1j}|$がある程度大きくなければ、b_{ij} は β_{11} に寄与しないことがわかるので、閾値$+h$ を仮定して、$|y_{1i}|>+h$ かつ$|x_{1j}|>+h$ となる i, j の組に対してのみ b_{ij} の値を設定することとする。そのような、i, j の集合を $I=(i_1,i_2,\cdots,i_p)$, $J=(j_1,j_2,\cdots,j_q)$と書くと

$$b_{11} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} y_{1i} x_{1j} b_{ij} = k_1 s_1 \qquad (11)$$

となり、b_{ij} は p×q 個に限定される。

実測値とシミュレーション値の差を求められる固有値が k 個あったとすると式(11)の形の制約式が k 本あることになるので、$+h$ を調整して b_{ij} の総数を k 個以内に限定すれば k 本の制約式を連立させ b_{ij} を k 個求めることができる。b_{ij} が求められれば

$$A + eB = A + (e b_{ij}) \qquad (12)$$

により係数行列の補正ができ、補正された係数行列に対して固有値解析を行うことで、固有値の補正を行うことができる。

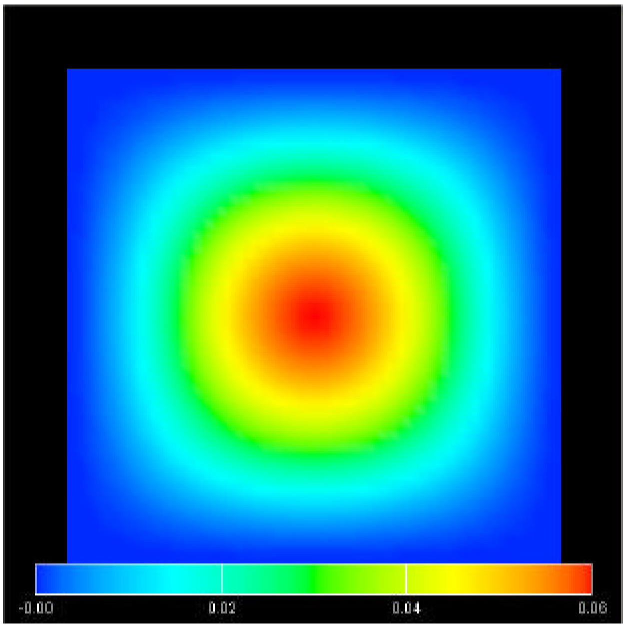
以上のような方法で、固有値の補正を行うために必要な機能を、既存の有限差分法シミュレータに追加し、アクリル板を対象として補正を試みた。

4. アクリル版シミュレーションにおける補正

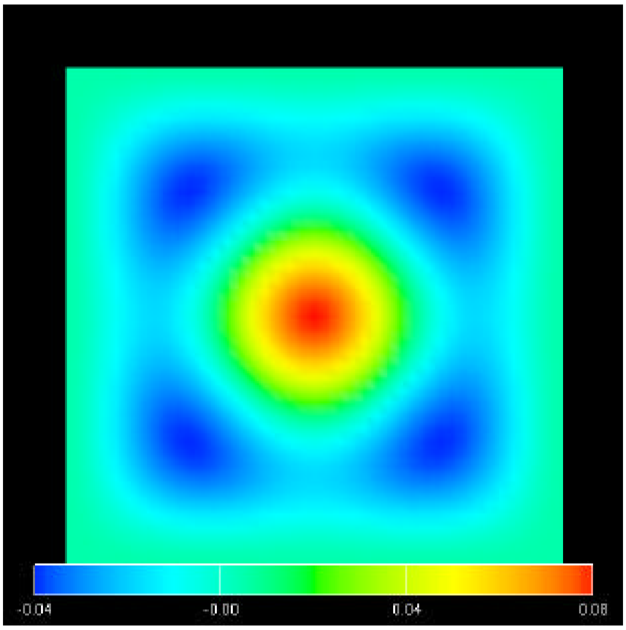
固有値の補正を行うために、シミュレーション結果と実測値の差を求める必要があるが、図—2 のイナータンスグラフからわかるように、200Hz 以上の周波数域ではシミュレーション結果と実測値の差が大きく、シミュレーション結果が実測値のどの部分と対応するのかがわかりづらくなっている。このため、今回は 200Hz 付近までに存在する 22 個の固有値のみを利用して補正を試みることにした。

はじめに、固有値解析を行い、係数行列とその転置行列の固有値と固有ベクトルの計算を行う。この結果、図—3～図—8 のような、固有ベクトルを求めることができた。次に、固有値解析によって求められた固有ベクトルを基に、i, j の組を決めていった。最後に b_{ij} を計算し係数行列を補正することになるが、このとき e を 0.7 に設定して計算を行った。

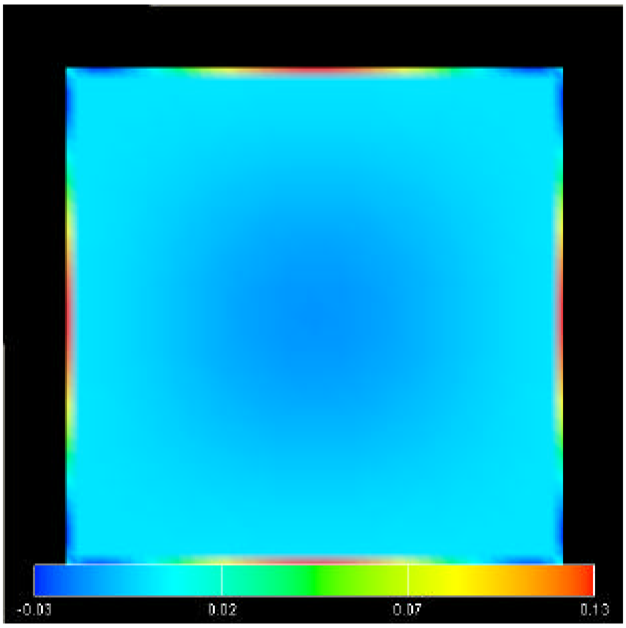
ここで、対象としているアクリル板モデルには 1681 個の節点があるので、1681×1681 本の制約式があれば完全な補正を行うことができるが、今回は 22 個の固有値のみを利用して補正を行うこととしたので、22 本の制約式のみで補正を行うことになる。このことから、i, j の組の選択の仕方は多数あり、その選択のしかたによっては



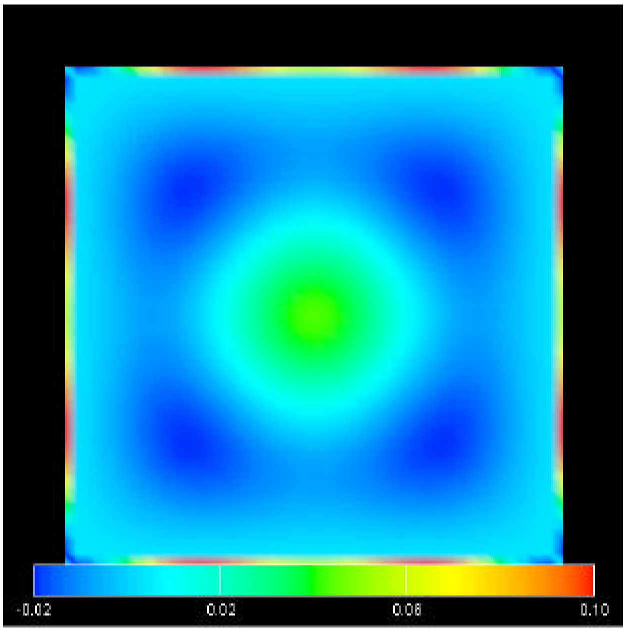
図—3 第 1 固有ベクトル



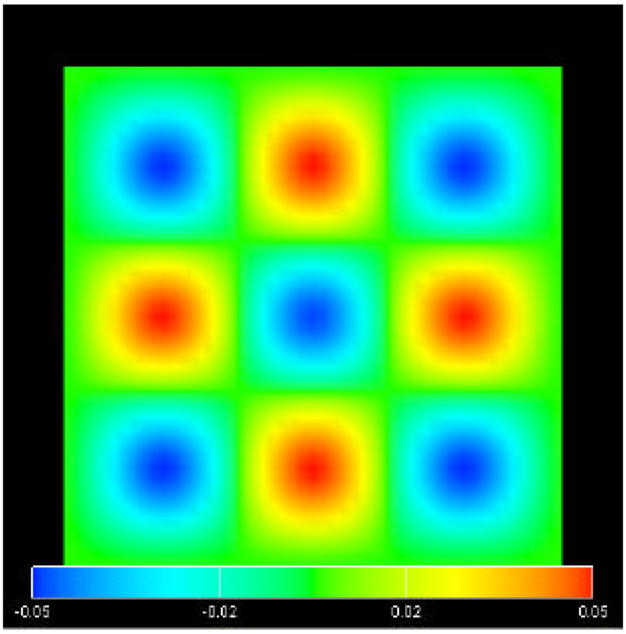
図—5 第 6 固有ベクトル



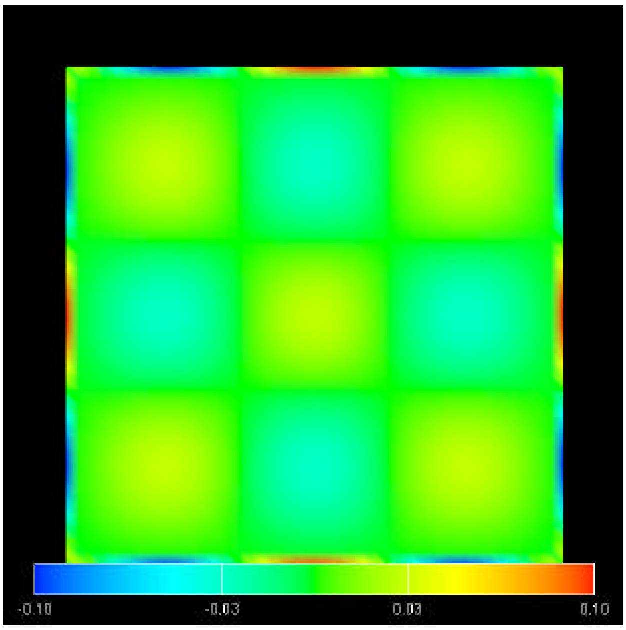
図—4 転置行列の第 1 固有ベクトル



図—6 転置行列の第 6 固有ベクトル



図―7 第 11 固有ベクトル

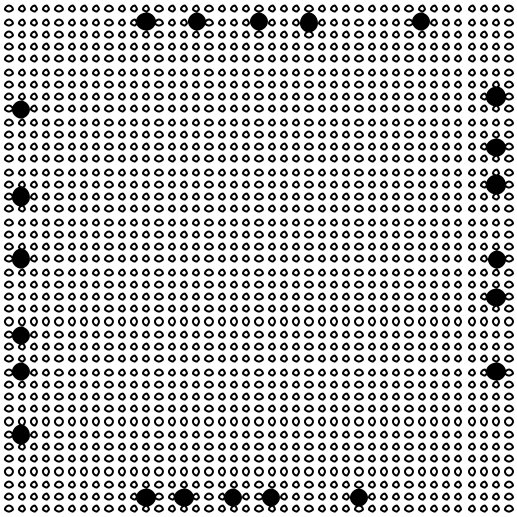


図―8 転置行列の第 11 固有ベクトル

十分な補正効果が得られないことがあるために、実際に i, j の組を決めて補正を行った結果を検討し、新たな i, j の組を決めるという作業を行った。

まず、係数行列の固有ベクトル及びその転置行列の固有ベクトルの両方において、可能な限り値が大きくなる節点を i, j として設定し補正を行うこととした。このとき、係数行列の固有ベクトルでは、大きな値は板の中央付近に有り板の外周付近では非常に小さくなっているのに対して、その転置行列の固有ベクトルでは、板の外周付近に大きな値が存在しており中央付近にも比較的大きな値が存在している。このことから、2 つの固有ベクトルに共通して値が大きくなる位置は、板の中央付近となるので、i, j として板の中央付近の節点を設定し補正を行った。しかしながらその結果は、補正前のシミュレーション値及び実測値の両方から大きく異なる結果となった。このことから、i, j の組を板の中央付近から設定するのは適当でなく、シミュレーション値と実測値に差が生じる原因は板の中央付近にはないと考えられた。

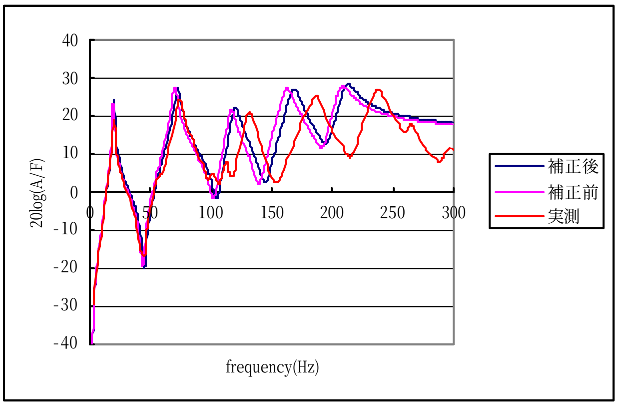
次に、転置行列の固有ベクトルにおいて板の外周付近の値が大きくなっていることから、i, j の組を板の外周付近の節点に設定し補正を行った。このとき、i, j を同じ節点に設定する場合と、i, j を異なる節点に設定する場合の 2 通りを行い、このとき設定した節点の位置と補正を行った結果を次に示す。



図―9 補正にあたり選択した節点（i=j）

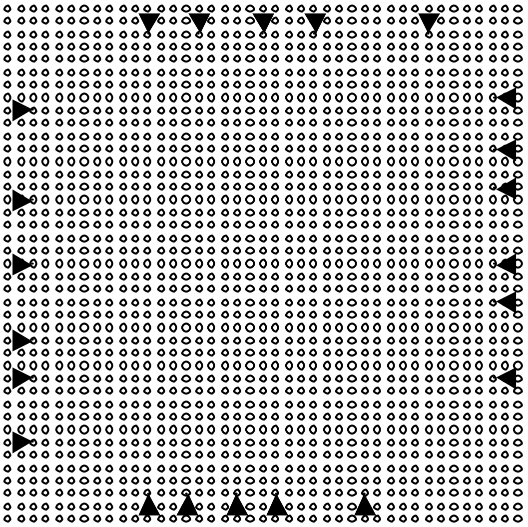
表―1 補正前後の固有周波数(Hz)

補正前	補正後	実測周波数
19.1872	19.8551	19
39.0348	40.3072	39
39.0348	40.4457	39
57.4964	59.3076	62
69.7059	72.279	72
70.0464	72.3175	73
87.4116	89.818	90
87.4116	90.3919	90
110.98	114.769	125
110.98	114.87	125
116.383	119.754	132
127.704	131.377	145
128.253	132.258	146
156.219	159.705	177
156.219	161.232	177
161.862	167.529	186
162.01	167.71	187
178.61	183.535	200
178.61	184.628	200
195.356	199.915	220
206.019	210.975	237
206.659	213.799	237

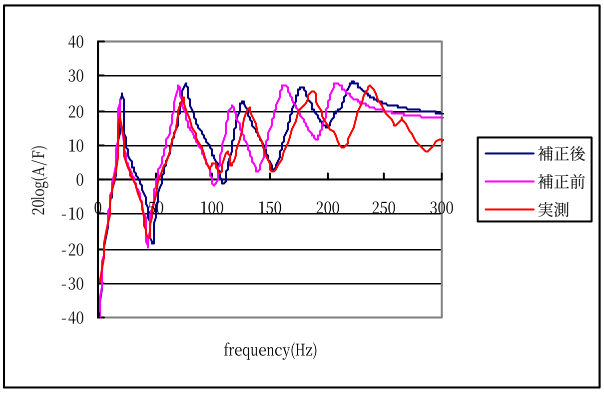


図—10　周波数応答解析結果イナータンス

i, j を図—9 のようにアクリル板外周付近の同じ節点に設定し補正を行った結果、表—1 及び図—10 に示すような結果が得られ、あまり大きな補正効果は確認できなかった。しかし、周波数が高くなるほど補正効果は大きくなっており、周波数が高くなるほど実測値との差が大きくなるという傾向とあっていることから、i, j に設定する節点の位置は妥当であると考えられた。



図—11 補正にあたり選択した節点（i→j）



図—12　周波数応答解析結果イナータンス

表—2　補正前後の固有周波数(Hz)

補正前	補正後	実測周波数
19.1872	21.0076	19
39.0348	42.6248	39
39.0348	42.8115	39
57.4964	62.5949	62
69.7059	76.3608	72
70.0464	76.6901	73
87.4116	94.4151	90
87.4116	95.5766	90
110.98	121.293	125
110.98	121.698	125
116.383	125.729	132
127.704	137.485	145
128.253	140.2	146
156.219	165.583	177
156.219	170.358	177
161.862	176.883	186
162.01	177.824	187
178.61	192.544	200
178.61	195.29	200
195.356	207.022	220
206.019	220.387	237
206.659	226.606	237

i, j を図—11 のようにアクリル板外周付近で、j を i のひとつ内側の節点に設定し補正を行った結果、表—2 及び図—12 に示すような結果がえられ、100Hz 付近では実測値に近い結果を得ることができたが、逆に 100Hz 未満の低周波数域でずれを生じるようになった。

以上のことから、シミュレーション結果と実測値の間に差が生じている原因は、アクリル板の外周付近にあると考えられ、解析において設定している境界条件と実測時の境界条件が異なっていることが解析結果に差が生じる原因として考えられた。

このことを検証するために、シミュレーションモデルの境界条件を変えて解析を行った。境界条件を変えるに当たって、固有値の補正において板の最も外側ではなく少し中に入った部分で補正を行ったときに最も良い結果が得られたことから、次に示すようなアクリル板モデルの形状をひとまわり小さくしたモデルを作成し、解析を行った。

補正結果検証用アクリル板シミュレーションモデル

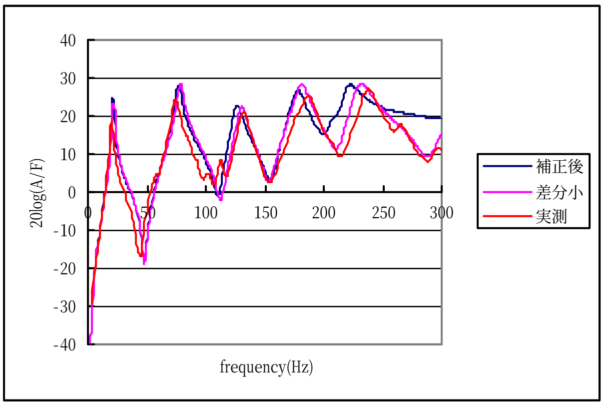
形状　　6×888×888(mm)

メッシュ分割数　x=38　，　y=38

材料特性　ヤング率　2.94×10^{6}(kg・mm/S^{2})

ポアソン比　0.35

密度　1.19×10^{-6}(kg/mm^{3})



図―13 周波数応答解析結果イナータンス

この結果、図―13 に示すような結果が得られ、モデルを小さくすることにより実測値に近い結果を得られることが確認できた。このことから、シミュレーション値と実測値に差が生じているのは、シミュレーションモデルと実測では境界条件が異なっていることが原因となっていることが推測できた。

5．考察と課題

有限差分法によるアクリル板のシミュレーションを対象として固有値の補正を行った。この結果、アクリル板のシミュレーションにおいて実測値と差が生じる原因が、シミュレーション時にアクリル板の外周に設定する境界条件にあることが推測できた。このことから、今回行った方法で固有値の補正を行うことは、実測値との対比を行いながら実測値との差が生じる原因を調査するのに役立ち、シミュレーションモデルの忠実度を上げていくために有効であると考えられる。

しかしながら、シミュレーション結果と実測値の差があまりに大きい場合には、制約式を数多く設定することが難しく、制約式の数が多いほど精度が良くなるこの方法を利用できない場合もある。また、今回、制約式を作るための節点の指定を手動で行ったが、設定できる制約式の数が多くなればなるほどこの作業は困難な作業となるために、自動的に節点の指定を行えるようにする必要があり、これらは今後の課題である。

参考文献

1)J.H. Wilkinson : The algebraic eigenvalue problem, Oxford Clarendon Press, 1965

2)William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery : NUMERICAL RECIPES in C(日本語版), 技術評論社, 1994

3)戸川隼人：新装版 UNIX ワークステーションによる科学技術計算ハンドブック基礎編 C 言語版, サイエンス社, 1998

4)山本信雄：VisualC++３はじめての MFC プログラミング, 翔泳社, 2000