

管壁の振動を考慮したトランペット音響管の有限要素解析

FEM Analysis for Trumpet Tube Considering Wall Vibration

井上文博¹⁾

Fumihiko Inoue

梅谷征雄²⁾

Yukio Umetani

¹⁾ 静岡大学大学院情報学研究科 Graduate School of Information, Shizuoka University

²⁾ 静岡大学情報学部 Faculty of Information, Shizuoka University

内容梗概：2次元軸対称のトランペット音響管(直管)の有限要素モデルを作成し、平面波での時間領域シミュレーションを行った。さらに、気柱モデルに等方性弾性体の管壁モデルを付加することで、管壁の振動を考慮した連成シミュレーションを行い、管壁の振動の有無による差異を把握した。その結果、管出口音圧のスペクトルの振幅値が高められ、さらに円筒の部分において、気柱が管壁から仕事を受けていることを確認した。

1. はじめに

これまでのトランペット音響管の物理シミュレーションにおいては、1次元平面波モデルの時間領域シミュレーションが行われており、共鳴周波数に関して実測とほぼ同等の精度が得られている[1-3]。しかし今後、音響管の形状の忠実な模倣化にうまく対応できるようにするためには、物理モデルの次元拡張が必須である。またその際、これまでは離散化手法として差分法が用いられていたが、同じ理由で、有限要素法の適用が望ましい。そこで本研究では、有限要素法による、2次元平面波モデルの時間領域シミュレーションを行う。

さらにここでは、気柱の壁(管壁)の振動が音に与える影響についての解析も行うことにする。管壁振動についての研究は、これまでも実測等で盛んに行われており、管壁振動が音に与える影響は少ないとの結論が得られている[4-5]。しかしこれまでのものは、管の形状を円筒に近似させたものであったり、材質が異なっていたりなどの乖離があるため、必ずしもトランペット管に同じ結果が当てはまるとは言えない。数値シミュレーションのアプローチも存在するが[6]、この場合もトランペット管に特化したものではなく、また有限要素法による離散化を行っているわけではないため、ベル部の管壁の形状を実現できていない。

本研究では、管壁についても有限要素モデルで作成し、気柱と連成させたモデルでの時間領域シミュレーションを行うことにする。そうして、管出口音圧などの時系列データを、管壁振動の考慮しない場合とする場合の両ケースを求めて比較することにより、2次元モデルにおける管壁振動の有無による影響の差異を把握することを目指す。

2. 定式化

2.1 気柱の振動モデル

今回の気柱モデルは平面波モデルであり、管壁の曲率を考慮した円筒座標系で実現した。管軸方向を z 軸、管径方向を r 軸とし、全ての現象がこの z 軸に対して軸対称性が保たれているとする。その場合シミュレーションに用いる方程式は r - z 平面に対して導出され、2次元問題に帰着できる。以上の措置を取った場合、音波伝播方程式は空間2次元で次のように表される[7]。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\Delta f + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (1)$$
$$u = -\frac{\partial f}{\partial z}, \quad v = -\frac{\partial f}{\partial r}, \quad p = r \frac{\partial f}{\partial t}$$

ここで ϕ は速度ポテンシャル、 c は音速、 (u,v) は速

度成分， p は圧力， ρ は空気の密度を示している．

2.2 管壁の振動モデル

管壁は等方性線形弾性体とした．そして同様に円筒座標系で実現し， z 軸に対して軸対称性が保たれているとした．以上の措置を取った場合，振動方程式は空間 2 次元で次のように表される[8]．

管軸方向：

$$r_m \frac{\partial^2 X_m}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 X_m}{\partial z^2} + B \frac{\partial^2 Y_m}{\partial r \partial z} + G \frac{\partial^2 Y_m}{\partial r \partial z} + G \frac{\partial^2 X_m}{\partial r^2} \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{r} \left((B+G) \frac{\partial Y_m}{\partial z} + G \frac{X_m}{r} \right) - R \frac{\partial X_m}{\partial t}$$

管径方向：

$$r_m \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 Y_m}{\partial r^2} + B \frac{\partial^2 X_m}{\partial r \partial z} + G \frac{\partial^2 X_m}{\partial r \partial z} + G \frac{\partial^2 Y_m}{\partial z^2} \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{r} \left(A \frac{\partial Y_m}{\partial r} + (B-A) \frac{Y_m}{r} \right) - R \frac{\partial Y_m}{\partial t}$$

このとき，

$$A = \frac{E(1-u)}{(1+u)(1-2u)}, B = \frac{Eu}{(1+u)(1-2u)}, G = \frac{E}{2(1+u)}$$

ここで ρ_m は管材の密度， E はヤング率， ν はポアソン比， G はずれ弾性率， (X_m, Y_m) は変位， R は減衰定数を示している．

3．計算方法とシミュレーション条件

作成した気柱モデルはトランペット管で，形状の複雑さ为了避免のために，まずは直管のモデルを使用した．図 1 に管軸を通る断面の形状を示す．但し，実際のシミュレーション領域は円筒座標系を適用しているため，図 2 のように管軸($r=0$)を中心に下半分が削除された形状となっている．これは円筒座標系であるため， $r=0$ となるのを避けるためである．



図 1 トランペット音響管の形状（直管）



図 2 シミュレーション領域

左端が吹口($z=0$)である．吹口の半径は 8.5mm，ベル開放端の半径が 61.85mm，管長は 1371.0mm で，

最も細い部分は入口から 12.0mm の位置で半径 1.9mm である．これらの寸法は実際の B 管 (YAMAHA 2320E) と同等のものを用いている．

また管壁振動を考慮するために管壁モデルも同時に作成した．図 3 のように，マウスピース部分 ($z=0 \sim 88\text{mm}$) 以外の気柱モデルの上部に管壁の領域を付加することで実現させている．壁の厚さとして 4 ケースを用意した．そのうちの 2 つは，全ての場所で，一様に 0.1mm であるモデルと，一様に 0.3mm のモデルである．残りの 2 つは，場所によって厚さの異なるモデルである．一方は，円筒部分が 0.3mm で，ベルに近づくにつれて 0.1mm へと薄くなっていくモデルであり(以下「ベル薄い」と表記)，もう一方は円筒部分が 0.1mm で，ベルに近づくにつれて 0.3mm へと厚くなっていくモデル(以下「ベル厚い」と表記)である．

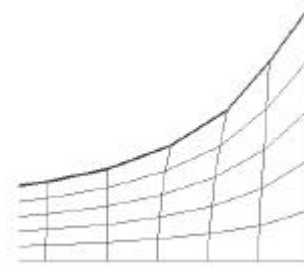


図 3 管壁を加えたシミュレーション領域
(上が管入口部分，下が管出口部分)

時間領域シミュレーションによる出口音圧波形の計算方法であるが，まずシミュレーション条件に沿った境界条件を指定し，式(1)を解く．そのときの出口境界での ϕ を求め，そこから p を時系列で求めればそれが出口音圧の波形となる．

管壁振動を考慮する場合は，式(1)と同時に式(2)(3)も解くことになる．式(2)(3)での変位から得られる壁の速度が，式(1)を解く際の境界条件として使用され，逆に式(1)で得られる管壁の圧力解が，式(2)(3)を解く際の境界条件に使用される．そこから管壁振動がない場合と同様に，気柱の解 ϕ を求めることになる．

偏微分方程式を解く際の離散化手法であるが，時間微分は後方 Euler 法を用いている．その時間刻み幅は 1.525×10^{-6} 秒である．一方，空間微分にお

ける要素分割については，気柱は管軸方向を 88 分割，管径方向を 5 分割，管壁は管軸方向を 80 分割，管径方向を 2 分割とした．

シミュレーションの実施にあたっては，市販されている偏微分ソルバ PSILAB を使用した．これはユーザが解法手順を指定でき，その指定に基づいてプリプロセッサが，差分法あるいは有限要素法による数値計算プログラムを自動生成するというツールである．

シミュレーションで用いたその他のパラメータ値は，いずれも MKS 単位系で， $c=340$ ， $\rho=1.2$ とする．管壁は真鍮製であるとして， $\rho_m=8.41e+3$ ， $E=10.06e+10$ ， $\nu=0.35$ ， $R=5.0e-4$ とする．

4．管壁振動を導入しないモデルでのシミュレーション

はじめに，管壁振動を考慮しない音響管モデルを用いて時間領域シミュレーションを行い，そこから出口音圧波形を求める．これは連成シミュレーションにおける，気柱モデルの単体テストを行っていることと等価である．

4.1 境界条件

ここでのシミュレーションでは表 1 のように境界条件を設定した． φ に対してのみ与える．

表 1 気柱モデルの境界条件

管入口	$t=0$ のとき $n \quad \varphi=1$ $t \neq 0$ のとき $n \quad \varphi=0$
管出口	$n \nabla f_n = -\frac{1}{c} \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta t}$
管壁	$n \quad \varphi=0$
管軸	$n \quad \varphi=0$

管入口では，インパルス入力を想定してこの条件とした．ここで n とは，境界に対する外向き単位法線ベクトルを示す．管出口については，平面進行波による音の放射が起きているとした．平面進行波の音圧と粒子速度の比が $p/v=\rho c$ となることを利用している． φ に付く添字は時間ステップ数を表している．つまり，管出口の境界条件は現在と 1 時間ステップ前の φ の値を用いて定義することになる．管壁については，粘性・熱放射を考慮しないものとしてこの条件とした．また音響管の形状が半分になったことで新たに現れた管軸付近

の境界については，軸対称性から $n \quad \varphi=0$ とした．

4.2 シミュレーション結果

インパルス入力に対する出口音圧のインパルス応答の時系列波形を図 4 に示す．またこの時系列波形を 0～180msec 間(データ数：32768)でフーリエ変換して求めた振幅スペクトルを図 5 に示す．

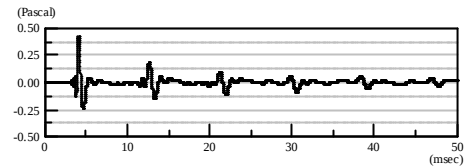


図 4 出口音圧インパルス応答の時系列波形

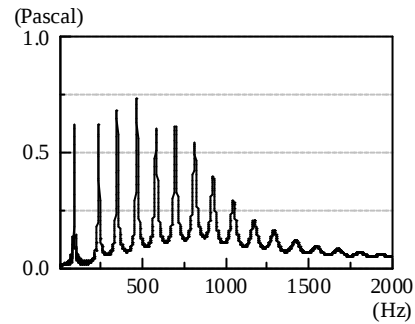


図 5 出口音圧の振幅スペクトル

4.3 評価

図 4 を見ると，4msec 付近で最初のインパルス応答が高い値で発生している．管長が 1371mm，音速が 340mm/msec であるので，妥当な時間で応答が生じているといえる．図 5 を見ると 1000Hz 以下にスペクトル値のピークが 8 ヶ所生じているのが確認できる．このピークの生じた周波数がその管の共鳴周波数であり，ここでのその値は 89Hz，237Hz，348Hz，466Hz，583Hz，699Hz，814Hz，925Hz である．これは，これまでの 1 次元モデルのシミュレーション(粘性・熱放射なし)から得られたと結果と比べて，共鳴点の数や共鳴が発生する周波数域がほぼ一致している．

5．管壁振動の導入による連成シミュレーション

次に管壁振動を考慮した音響管モデルを用いた時間領域シミュレーションを行い，そこから前節と同様に出口音圧波形を求める．

5.1 境界条件

連成シミュレーションでは表 2、表 3 のように境界条件を設定した。気柱モデルでは ϕ に対して、管壁モデルでは壁の変位と速度に対して与える。

表 2 気柱モデルの境界条件

管入口	$t = 0$ のとき $n \quad \phi = 1$ $t \neq 0$ のとき $n \quad \phi = 0$
管出口	$n \nabla f_n = -\frac{1}{c} \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta t}$
管壁モデルと接する境界	$n \quad \phi = \begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix}$
管軸	$n \quad \phi = 0$

表 3 管壁モデルの境界条件

外気と接する境界 (固定境界)	$X_m=0, Y_m=0$ $U_m=0, V_m=0$
外気と接する境界 (自由境界)	$n(T_{xx}, X_m+T_{xy}, Y_m)=0$ $n(T_{yx}, X_m+T_{yy}, Y_m)=0$
気柱モデルと接する境界	$n(T_{xx}, X_m+T_{xy}, Y_m)=0$ $n(T_{yx}, X_m+T_{yy}, Y_m)=-p$

$$T_{xx} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, T_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ G & 0 \end{pmatrix}, T_{yx} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ B & 0 \end{pmatrix}, T_{yy} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

気柱モデルに与えた境界条件について、ほとんどの境界は単体テストのものと同様であるが、管壁のモデルが気柱の上部に付加されているので、その管壁モデルと接する境界については変更する必要がある。ここでは、壁に垂直方向の気体速度が壁の速度に等しいという想定でこの条件とした。(U_m, V_m)は振動による弾性体の速度を示す。

次に管壁モデルについての境界条件について、z=88～1371mm 間に付加された管壁のうち、マウスピースに近い z=88mm の部分を固定境界条件とした。それ以外の外気と接する境界は自由境界条件である。気柱モデルと接する境界については、気柱内で生じる圧力によって壁が力を受けることを想定してこの条件とした。

5.2 シミュレーション結果

インパルス入力に対する出口音圧のインパルス応答の時系列波形を図 6 に示す。またこの時系列波形を 0～180msec 間(データ数: 32768)でフーリエ変換して求めた振幅スペクトルを図 7 に示す。さらに、周波数スペクトルにおいて、1000Hz 未満で共鳴のピークを示した共鳴周波数とそのスペク

トル振幅値を表 4 に示す。ここでは管壁振動のないモデルの共鳴周波数も合わせて列挙させてある。

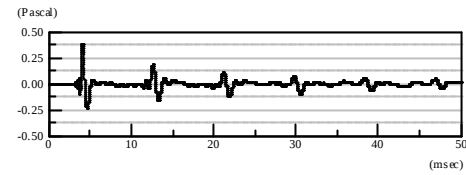


図 6 出口音圧インパルス応答の時系列波形
(厚さ 0.1mm の管壁を振動させた場合)

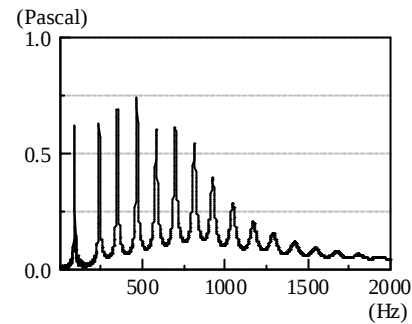


図 7 出口音圧の振幅スペクトル
(厚さ 0.1mm の管壁を振動させた場合)

5.3 評価

図 6～7 を見た限りでは、管壁振動の有無による差異は容易に把握できないが、表 4 を見ると、それは明確である。管壁振動がない場合と比べて、各共鳴点でのスペクトルが大きい値を示しているのが確認できる。2 次元の管壁振動が加わることで、音圧が高められるということが分かった。

最も大きな変化が見られるのは壁の厚さが 0.1mm の場合であり、壁が厚くなるにつれて管壁振動の影響が小さくなってきているのが分かる。これは厚くなるほど管壁が振動しにくいことから結果と考えられるが、実際のトランペット管において、最も壁の薄い部分でも厚さが約 0.5mm であることを考慮すると、管壁振動による影響はかなり少ないと言える。

場所によって厚さの異なるモデル同士を比較してみると、「ベル薄い」のモデルよりも、「ベル厚い」のモデルの方がスペクトルが大きいことが分かる。管壁が厚くなるほど振動しにくいことを考慮すれば、管壁振動の影響は、ベル部分よりも円筒部分の方が大きいことが分かった。

一方、共鳴周波数を見ると、ほとんど変化が見られなかった。

表 4 各モデルの共鳴周波数とスペクトル振幅値

(各列の左が共鳴周波数(単位 Hz), 右がその周波数でのスペクトル振幅値(単位 Pascal))

壁壁振動なし		管壁 0.1mm		管壁 0.3mm		ベル薄い		ベル厚い	
89	0.616	89	0.626	89	0.619	89	0.616	89	0.624
237	0.619	237	0.628	237	0.622	237	0.620	237	0.625
348	0.682	347	0.694	347	0.686	347	0.686	347	0.690
466	0.732	466	0.745	466	0.736	466	0.738	466	0.741
583	0.602	583	0.610	583	0.604	583	0.606	583	0.607
699	0.606	698	0.614	698	0.609	698	0.611	698	0.611
814	0.537	814	0.544	814	0.539	814	0.541	814	0.541
925	0.392	924	0.396	925	0.393	925	0.395	925	0.394

表 5 正弦波 347Hz の入力における各境界での仕事量の総和 (定常状態から 1 周期分)

モデル	z=0 気柱の 入口境界	z=88 ~ 319 での 管壁境界	z=319 ~ 564 での 管壁境界	z=564 ~ 809 での 管壁境界	z=809 ~ 1129 での 管壁境界	z=1129 ~ 1324 での 管壁境界	z=1324 ~ 1371 での 管壁境界	z=1371 気柱の 出口境界
管壁振動なし	-9.714e-3	——	——	——	——	——	——	5.572e-3
管壁 0.1mm	-1.075e-2	-3.109e-5	-5.166e-5	-3.400e-5	-9.607e-5	-1.378e-5	3.361e-5	5.746e-3
管壁 0.3mm	-1.061e-2	-1.003e-5	-1.670e-5	-1.109e-5	-3.124e-5	-4.527e-6	1.097e-5	5.637e-3
ベル薄い	-1.060e-2	-1.007e-5	-1.604e-5	-1.291e-5	-1.241e-5	2.231e-5	3.719e-5	5.563e-3
ベル厚い	-1.064e-2	-2.910e-5	-4.544e-5	-1.602e-5	-2.521e-5	-6.044e-6	1.102e-5	5.676e-3

6. 仕事量の解析

前節のシミュレーションで、管壁振動を導入すると、出口の音圧が高められることが分かり、さらに、ベル部分よりも円筒部分の方が管壁振動の影響を受けやすいことが分かった。ここでは、その理由を把握するため、インパルスではなく正弦波を入力して時間発展を行い、定常状態での各場所での 1 周期分の仕事量(エネルギー移動量)の総和を計測する。

6.1 計算方法

仕事量は一定時間での仕事率の積分で求められる。今回の共鳴管モデルに特化して言うならば、管入口、管出口、管壁と気柱が接している境界の各点に対して、そこでの圧力と外向き法線方向の流速との積を時系列で求める。それを領域内で積分し、さらに 1 周期分を積分することで求められる。

6.2 計算結果

正弦波 347Hz を入力とした時の、各境界での仕事量を表 5 に示す。最左列の値は、気柱の管入口での仕事量の総和、最右列の値は管出口での仕事

量の総和、中間の列の値は管壁と気柱が接している境界を 6 つの線分に分け、各境界での仕事量の総和を示している。但し、管壁振動のないモデルの場合、そこでの仕事量はない。値の符号は、各境界に対して外向きを正としている。仕事量の値が正の場合、気柱が外部に対して仕事をしていることを意味し、負である場合、気柱が外部から仕事をされていることを意味している。

さらにここでは参考として、正弦波応答のイメージを湧きやすくするために、定常状態(仕事量を求めている 1 周期のうちの 1 時間ステップ)における各節点での仕事率の分布を図 8 に示す。図の左端を管入口、右端を管出口とし、347Hz の正弦波応答を示している。管壁と気柱が接する境界の各節点から出ている矢印は、その場所での仕事率を表している。矢印が右斜め上を向いているのは、値が正の点(仕事をしている)であり、左斜め下を向いているのは、値が負の点(仕事をされている)である。一方、共鳴管全体にペイントされている色は、気柱内部での仕事率を示し、色が薄いのは値が正の点であり、色が濃いのは値が負の点である。

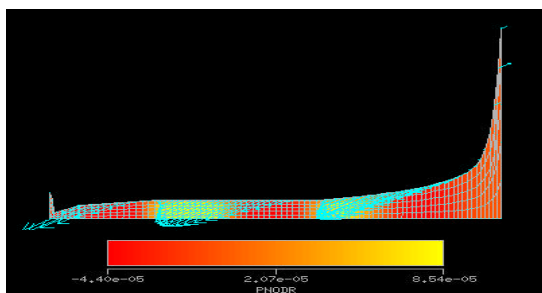


図8 347Hz 正弦波を入力した際の仕事率の分布
(厚さ 0.1mm の管壁を振動させた場合)

6.3 評価

どのケースも管入口が負の値となっている。管入口では、共鳴管は仕事をされるはずなので、これは妥当な結果である。管入口における仕事量の値そのものを見ると、管壁の振動が付加されたことで、値は大きくなっている。これは、管壁振動があると、管入口でのインピーダンスが大きくなるので、同じ流速を確保するための圧力も大きくなり、結果、気柱がされる仕事量が大きくなると考えられる。

管壁と気柱が接した境界では正の値と負の値が混在している。1 周期分の総和で見ると、主に、管壁から仕事をされている部分が多いことが分かる。この管壁から得られたエネルギーによって、出口からの流出エネルギーが増やされることになると考えられる。結果、管壁振動の導入によって、出口音圧が高められることが定量的に確認できたと言える。

さらに詳細に見てみると、どのモデルも、ベル部分よりも円筒部分の方で管壁から気柱へのエネルギー移動が多く行われており、逆に出口近くのベル部分では、気柱から管壁へのエネルギー移動が多く行われていることが分かる。また仕事量の値は、0.3mm の部分よりも、0.1mm の部分の方が大きいことが分かる。以上の 2 点から、出口音圧が高くなるのは、「ベル薄い」のモデルよりも「ベル厚い」のモデルであるということの理由が容易に把握できる。

図 8 に関して、これはある 1 時間ステップでのスナップショットであるが、時間を進めてこの分布の変化を見てみると、管壁での仕事率は、ほぼ定常波の挙動を示しているのが確認できた。腹となっている部分では、そこでの圧力と流速に位相差が生じているようで、仕事率の符号の如何も、その位相に依存しているものと推測できる。

7. まとめ

2 次元有限要素気柱モデルに管壁モデルを付加することで、管壁振動を考慮した連成モデルの時間領域シミュレーションを試みた。まず、その前段階として、管壁振動を考慮しないモデルのシミュレーションをしたところ、共鳴周波数が 1 次元モデルのものからあまり変化がなかったことを確認した。次に、管壁振動を導入してシミュレーションしたところ、共鳴周波数には変化は起こらず、出口の音圧や仕事量が高められることを確認し、さらにベル部分よりも円筒部分での影響が強いことを確認した。しかし、その増加量はかなり少なく、音そのものへの影響は少ないと考えられる。

今回のシミュレーションでは、管周方向(θ 方向)の管壁振動や、管内で起こる非線形現象、あるいは管壁自体の非線形振動体への拡張は考慮していない。これらの条件を考慮したシミュレーションを行うことが、今後の課題として挙げられる。

参考文献

- [1] S.Adachi,M.sato:“Time-domain simulation of sound production in the brass instrument”, J.Acoust.Soc.Am.97,pp3850-3861 (1995)
- [2] J.Backus,T.C.Hundley:“Harmonic generation in the trumpet”, J.Acoust.Soc.Am.49, pp509-519 (1971)
- [3] R.Causse,J.Kergomard,X.Lurton:“Input impedance of brass musical instruments——Comparison between experiments and numerical models”,J.Acoust.Soc.Am.75, pp241-254 (1984)
- [4] J.Backus:“Effect of wall material on the steady tone quality of woodwind instruments”, J.Acoust.Soc.Am.36, pp1881-1887 (1964)
- [5] J.Backus,T.C.Hundley:“Wall vibrations in flue organ pipes and their effect on tone”, J.Acoust.Soc.Am.39, pp936-945 (1966)
- [6] F.Gautier, N.Tahani:“Vibroacoustic behavior of a simplified musical wind instrument”,Journal of Sound and Vibration. 213,pp107-125 (1998)
- [7] 城戸健一:“音響工学”,コロナ社 (1982)
- [8] 吉田総仁:“弾塑性力学の基礎”,共立出版 (1997)