

偏微分ソルバ PSILAB による金管楽器シミュレーション

BRASS INSTRUMENT SIMULATION USING PDE SOLVER PSILAB

井上文博¹⁾, 梅谷征雄²⁾

Fumihiro INOUE and Yukio UMETANI

1) 静岡大学 情報学研究科情報学専攻 (〒432-8011 浜松市城北 3-5-1, cs7012@cs.inf.shizuoka.ac.jp)

2) 工博 静岡大学教授 情報学部情報科学科 (〒432-8011 浜松市城北 3-5-1, umetani@cs.inf.shizuoka.ac.jp)

We carry out the numerical simulation of two-dimensional air column vibration model in the brass instrument tube (trumpet) by using PDE (partial differential equation) solver PSILAB. In the case that viscosity and sound radiation from remote end are considered, resonance frequencies of two-dimensional model approach to ones of one-dimensional model in low frequency. But, in high frequency, different result appears. In this paper, we also state problems encountered in using PSILAB.

Key Words : brass instrument, simulation, viscosity, radiation, resonance frequency, PSILAB

1. はじめに

金管楽器音響管の物理シミュレーションにおいて、これまで1次元化したモデルのシミュレーションが行われ、共鳴周波数に関して実際の音響管とほぼ同等の精度を得ることができている[1][2]。しかし将来、シミュレーションで「管体振動」や「非線形的現象」といった重要な現象を解析する際、1次元の定式ではその実現が困難であるため、次元の拡張された物理モデルが必要となる。

よって本研究では、計算機を用いて2次元に拡張したシミュレーションを行い、さらに空気粘性現象の導入をはかって、すでにそれが実装されている1次元モデルと同等の共鳴周波数が得られるように調整を行うものである。空気粘性は管の特殊な形状によって生じる現象であり、共鳴周波数を変化させる重要な効果がある。したがって2次元モデルにおいても実装が必要と考え、次元拡張が可能な流体方程式の粘性項を適用することで、粘性現象を2次元化させてシミュレーションを行う。そうして得られた管の共鳴周波数と1次元モデルの共鳴周波数とが一致しているか否かを確認して、2次元化した粘性現象の妥当性を評価する。

今回のシミュレーションは偏微分方程式数値シミュレーションツール PSILAB を用いて行った[3]。そのプログラム生成の過程で気づいた PSILAB の利点や問題点についても、共にここで論述しておくことにする。

2. 定式化

今回の音響管モデルは管壁の曲率を考慮した円筒座標系で実現した。管軸方向を z 軸、管径方向を r 軸とし、全ての現象がこの z 軸に対して軸対称性が保たれている

とする。その場合シミュレーションに用いる方程式は r - z 平面に対して導出され、2次元問題に帰着できる。

以上の措置をとった場合、音波伝播方程式は空間2次元では次のように定式化される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \left(\Delta \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (1)$$

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

ここで、 ϕ は速度ポテンシャル、 c は音速、 u 、 v は速度成分、 p は圧力、 ρ は空気の密度を示している。

一方、空気粘性現象の実現に用いる粘性項であるが、ここでは音波伝播と対応の取りやすい圧縮性流体方程式の粘性項を用いることにする。これを式(1)に付加することで、次のような2次元粘性を考慮した音波伝播方程式が得られ、計算機上でその実現が可能となる[4]。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \left(\Delta \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \left\{ \Delta \left(\Delta \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right\} \quad (2)$$

ここで、 μ は空気粘性係数、 λ は空気第二粘性係数を示しており、ストークスの仮定 ($\lambda = -2\mu/3$) を用いる。

管の共鳴周波数は管入口の速度ポテンシャルを求め、それから入力インピーダンスのピークを計算することで求められる。今回のシミュレーションでは、時間発展を行わずに式(2)から時間項を削除した式を作成し、それを

解くことにする。まず式(2)が変数分離法を使って解かれたと仮定すると、その解は

$$\phi = \phi_0(\omega) \cos \omega t + \phi'_0(\omega) \sin \omega t \quad (3)$$

とおくことができる。ここで、 $\phi_0(\omega)$ は ϕ の初期値、 $\omega \phi'_0(\omega)$ は初期時間微分を示す。これを式(2)に代入し、さらに $\cos \omega t$ の係数をゼロとおくと、

$$c^2 \left(\Delta \phi_0(\omega) + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_0(\omega)}{\partial r} \right) + \omega^2 \phi_0(\omega) - \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \left\{ \Delta \left(\Delta \phi_0(\omega) + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_0(\omega)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \phi_0(\omega) + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_0(\omega)}{\partial r} \right) \right\} = 0 \quad (4)$$

これがシミュレーションで実際に解く方程式となる。

3. 2次元粘性現象の妥当性評価

(1) 実験方法とシミュレーション条件

音響管はトランペット管で、形状の複雑さを避けるために、まずは直管のモデルを使用した。図1に管軸を通る断面の形状を示す。但し、実際のシミュレーション領域は円筒座標系を適用しているため、図2のように管軸($r=0$)を中心に下半分が削除された形状となっている。



図1 トランペット音響管の形状(直管)



図2 シミュレーション領域

左端が吹口($z=0$)である。吹口の半径は8.5mm、ベル開放端の半径が61.85mm、管長は1371.0mmで、最も細い部分は入口から12.0mmの位置で半径1.9mmである。これらの寸法は実際のB管(YAMAHA 2320E)のものをを用いている。

共鳴周波数の計算方法であるが、まずPSILABによりシミュレーション条件に沿った境界条件を指定し、任意の各周波数 ω の代入を行い、式(4)を解く。このとき、空間微分はGalerkin有限要素法で離散化を行うこととする。それによって得られた解 $\phi_0(\omega)$ から、次の式を用いて入カインピーダンス Z_{in} を得る。

$$Z_{in} = \frac{\rho \omega \phi_0(\omega)}{S} \Big|_{z=0} \quad (5)$$

ここで、 S は管入口の断面積を示す。以上の計算を各周

波数ごとに行い、その中から $|Z_{in}|$ がピークとなっている周波数を求める。この周波数がその管の共鳴周波数ということになる。この結果をこれまでの研究で得られている、同形状で粘性を考慮した1次元モデルの結果[1]と比較を行うことで2次元粘性現象の妥当性を評価する。

PSILABの方程式に対する適用範囲は2階までの偏微分方程式である。したがって式(4)のような4階微分の項が混入する場合には、2階までの方程式を連立させて解かなければならない。今回のシミュレーションで作成した、方程式を解くスキームを図3に示す。

```
SOLVE U,V,DV,FAI OF
  U=-DX(FAI), V=-DY(FAI),
  DV=DX(U)+DY(V)+1/Y*V,
  C**2*DV+OMEGA**2*FAI
  -(LAMDA+2*MYU)/RHO*(LAPL(DV)+1/Y*DY(DV))=0
BY 'GAUSS' UNDER BGRP01;
```

図3 本シミュレーションプログラムの連立方程式部分

ここでは新たに $U(=u)$ 、 $V(=v)$ 、 DV という中間変数を用いることで、4階微分の方程式を実現させた。

境界条件の設定についてであるが、ここでは連立方程式内で用いている U 、 V 、 DV 、 $FAI(=\phi_0(\omega))$ の全ての変数について境界条件を定めた。本来、シミュレーションにおいて必要な境界条件は U 、 V 、 FAI についてだけでなく、 DV については特に設定しなくても構わない変数である。しかし、本シミュレーションの方程式内で、 DV に対して2階微分の計算を行っているため、PSILABの構文ルール上、 DV についても全境界で境界条件を定める必要がある。今回のシミュレーションでは表1のように境界条件を設定した。

表1 音響管シミュレーションの境界条件

	管入口	管出口	管壁	管軸
FAI	$n(FAI) = \cos \omega t$	$FAI=0$	$n(FAI) = 0$	$n(FAI) = 0$
DV	$n(DV) = -dx(DV)$	$DV=0$	$n(DV) = 0$	$n(DV) = 0$
U	$u = \cos \omega t$	指定せず	$u=0$	$n u=0$
V	$v=0$	指定せず	$v=0$	$v=0$

管入口では、一定の粒子速度をもって駆動させるとしてこの条件とした。管出口についてであるが、ここではまず簡略化のために、音が出口の外側に放射しないと仮定した。そのため出口圧力($=\rho \omega \phi_0(\omega)$)が時間に依らず一定となることから $FAI=0$ 、 $DV=0$ としている。管壁については、粘性の影響を考慮して速度成分はゼロとしている。音響管の形状が半分になったことで新たに現れた管軸付近の境界については、軸対称性から $n u=0$ 、 $v=0$

としている。

要素分割について、管軸方向には 160 分割し、特にマウスピース部分(管入口から 88.0mm までの部分)に、そのうちの 80 分割という細かい分割を行った。これはマウスピースでの振る舞いが管全体の振る舞いに大きく影響を与えると考えたためである。また管径方向は 25 分割とし、粘性の影響を考慮して、図 4 のように管壁に近いほど等比級数的に分割を細かくした。

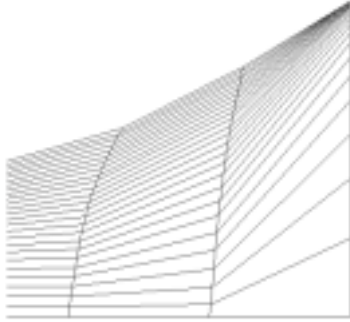


図 4 音響管の要素分割(ベル部分)

シミュレーションで用いたその他のパラメータ値は、MKS 単位系で $c=340$ 、 $\rho=1.2$ 、 $\mu=18.2 \times 10^{-6}$ とした。

(2) シミュレーション結果

まず最初は参考として、空気粘性を考慮していないモデルの共鳴周波数を求めて、同じく粘性を考慮していない 1 次元モデルの結果と比較を行ってみることにする。この場合の解くべき方程式は、式(4)から粘性項が削除されたもので、境界条件も速度ポテンシャルについてのみの設定となる。以上のシミュレーション条件によって得られた各共鳴点での共鳴周波数(1000Hz 未満)と、1 次元モデルの共鳴周波数との差を表 2 左に示す。

続いて、粘性を考慮した場合の 2 次元シミュレーションを行った。そうして得られた各共鳴点での共鳴周波数と、同じく粘性を考慮した 1 次元モデルの共鳴周波数との差を表 2 右に示す。

表 2 得られた 2 次元モデルの共鳴周波数と 1 次元モデルの共鳴周波数との差

粘性なし			粘性あり		
1 次元	2 次元		1 次元	2 次元	
周波数	周波数	差	周波数	周波数	差
89	89	0	87	88	1
237	237	0	233	234	1
347	347	0	342	343	1
465	465	0	460	459	1
582	581	1	576	574	2
697	695	2	690	686	4
811	809	2	805	799	6
923	921	2	918	908	10

(単位 Hz)

(3) 評価

粘性がない場合の結果を見ると、全ての共鳴点において 1 次元モデルとの差が小さく収まっているのが確認された。したがって粘性を無視した音波の伝播、すなわち平面波を与えた場合については 1 次元から 2 次元への拡張が正しく行われているといえる。

一方、粘性項を付加した場合の周波数の差を見ると、低周波の共鳴点では 1 次元モデルとの差が小さい値に収まっているが、高周波の共鳴点では 900Hz が 10Hz というように差が大きく広がっているため、全体的には 2 次元粘性現象の妥当性はやや不十分であるといえる。

4. 音の放射の導入

(1) 実験方法とシミュレーション条件

先程の実験では、簡略化のために出口の圧力が一定であると仮定してシミュレーションを行った。しかし実世界では管出口の圧力は一定でなく、音波が外に漏れるために音の放射による効果を考慮する必要がある。そこでこの実験では、実験方法やシミュレーション条件はそのまま、管出口の境界条件のみを変更することで管端の補正を行い、音の放射を考慮した状態での 2 次元粘性現象の妥当性を評価する。

音の放射は、管出口での速度ポテンシャルについての境界条件を、次のような複素形式の第三種境界条件に変更することで実現できる。

$$\varphi_r \text{ (FAI の実部): } n \nabla \phi_r = -k \frac{\phi_i (A^2 + B^2 - 1) + 2\phi_r B}{A^2 + 2A + 1 + B^2}$$

$$\varphi_i \text{ (FAI の虚部): } n \nabla \phi_i = k \frac{\phi_r (A^2 + B^2 - 1) - 2\phi_i B}{A^2 + 2A + 1 + B^2}$$

このとき、

$$A = -\frac{1}{\sqrt{1 + 4(ka)^2}} \cos(\tan^{-1} 2ka),$$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{1 + 4(ka)^2}} \sin(\tan^{-1} 2ka)$$

($k = \omega/c$ 、 a = 管出口の半径)

その他のシミュレーション条件は音の放射がない場合と同様とする。

(2) シミュレーション結果

先程と同様に、最初は空気粘性を考慮していないモデルの共鳴周波数を求めて、同じく粘性を考慮していない 1 次元モデルの結果と比較を行ってみることにする。各共鳴点での共鳴周波数(1000Hz 未満)と、1 次元モデルの共鳴周波数との差を表 3 左に示す。

続いて、粘性を考慮した場合の 2 次元シミュレーションを行った。そうして得られた各共鳴点での共鳴周波数と、同じく粘性を考慮した 1 次元モデルの共鳴周波数との差を表 3 右に示す。

表3 得られた2次元モデルの共鳴周波数と
1次元モデルの共鳴周波数との差(音の放射あり)

粘性なし			粘性あり		
1次元	2次元		1次元	2次元	
周波数	周波数	差	周波数	周波数	差
89	89	0	87	88	1
238	237	1	234	235	1
348	347	1	343	344	1
466	466	0	460	460	0
583	582	1	577	583	6
698	696	2	691	690	1
812	812	0	805	807	2
924	923	1	918	909	9

(単位 Hz)

(3) 評価

音の放射を考慮しても、結果としては変化していないといえる。粘性のない場合は1次元から2次元への拡張が正しく行われているが、粘性を考慮した場合は高周波の共鳴点で差が大きく広がっていることから、全体的には2次元粘性現象の妥当性はやや不十分である。

5. 考察と今後の課題

音の放射の有無に関わらず、今回のシミュレーションでは高周波の共鳴点において1次元モデルとの差が大きいため、2次元粘性現象の妥当性はやや不十分であるとの結果が得られた。考えられる原因としては要素分割の仕方にあるだろう。共鳴周波数は要素分割の如何に影響を受けやすく、今回の実験でもそれが影響していると考えられる。したがって、粘性現象を正しく反映させるためには要素分割数を変更して改めて検討する必要があると思われる。なお今回のシミュレーションでは、管壁に近いほど管径方向の分割が細くなるという手法を、PSILABの等比分割を用いて行っている。その際、辺領域は等比分割に、内部領域はPSILABトランスレータが自動的に分割を行うという等数分割に指定しているが、実はこのことが共鳴周波数に影響を及ぼしている可能性も考えられる。なぜなら、そのようにして分割指定を混合させた要素分割をした場合、ベル部分については図5のような状態となるからである。つまり、自動分割指定をした内部領域は、等比分割をあまり反映しない分割がなされてしまい、領域境で特異な分割になるという問題が起こるのである。これが共鳴周波数を変化させる一因とも考えられ、同時にPSILABにとって補正が望まれる点とも言える。例えば自動分割の指定を行っても、隣接する領域の分割具合(ここでは辺領域の等比分割)に適応した分割がなされるよう工夫を行えば、ユーザにとってこのツールがより使い勝手の良いものとなるであろう。

また、もうひとつPSILABに対して望まれる点を挙げ

るとすれば、プログラム生成の際の、高階微分方程式における境界条件への対処であろう。2階を超える方程式の解法については、中間変数を用いることで、本来不必要な変数についても境界条件を定めなければならないという面倒さが生じてきて、さらにこの不必要な境界条件によって、共鳴周波数などの結果自体が左右されてしまう可能性も懸念される。PSILABの適用範囲[3]からは大きく外れているため、このような問題の解決は難解なものであるが、できればこの点についても何らかの対処が期待されるところである。

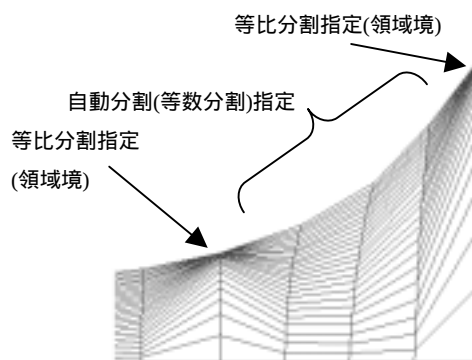


図5 等比分割指定と自動分割指定が
混合した場合の要素分割(ベル部分)

逆にPSILABの利点としては、やはり偏微分方程式とその数値解法を簡潔な記述で行えることが第一に挙げられるだろう。そのほか、シミュレーション条件の変更が容易に行えることや、FORTRANプログラムの自動生成の速さも満足できる点であるといえる。

一方、金管楽器シミュレーションの、その他の今後の課題としては、2次元粘性現象が入力インピーダンスそのものの値や圧力分布など、共鳴周波数以外の要素に与える影響についても解析を行う必要があると考えられる。さらに、1次元モデルでは実現できなかった「管体振動」や「非線形的現象」の解析も残された課題である。

参考文献

- 1) S. Adachi, M. Sato: Time-domain simulation of sound production in the brass instrument, J. Acoust. Soc. Am. 97, pp3850-3861, 1995
- 2) J. Backus, T. C. Hundley: Harmonic generation in the trumpet, J. Acoust. Soc. Am. 49, pp509-519, 1971
- 3) 石田潤, 平山裕之, 太田忠, 猪貝光祥, 久保昭一, 山賀晋: 偏微分方程式数値シミュレーションツール PSILABの実用問題への適用, 計算工学講演会論文集, vol. 4, pp245-248, 1999
- 4) 梅谷征雄, 梅村忠: トランペット音響管への流体方程式の適用(その1), 日本音響学会音楽音響研究会資料 MA99-72, 2000