

PSILAB によるトランペット吹奏系の解析

ANALYSIS OF A TRUMPET BLOWING SYSTEM USING PSILAB

榎田翼¹⁾, 梅谷征雄²⁾

Tsubasa ENOKIDA and Yukio UMETANI

- 1) 静岡大学 情報学研究科情報学専攻 (〒432-8011 浜松市中区城北 3-5-1, ia04013@s.inf.shizuoka.ac.jp)
- 2) 工博 静岡大学教授 情報学部情報科学科 (〒432-8011 浜松市中区城北 3-5-1, umetani@inf.shizuoka.ac.jp)

We carry out the numerical simulation of two-dimensional air column vibration model and lip oscillating model in the brass instrument tube (trumpet) by using PSILAB. The reason for using a two - dimensional model is from the knowledge of producing the oscillation of trumpet sound by the interaction between the pipe and the lip. The analysis which clarifies the conditions which realizes the oscillation of a smooth sound by analyzing a two-dimensional trumpet blowing system model is acquired. In this paper, we also state problems encountered in using PSILAB.

Key Words : brass instrument, simulation, resonance frequency, PSILAB

1. はじめに

金管楽器音の生成は唇と管体の協調発振によるが、唇の特性やふるまいについては不明な点が多く検討の余地が多く残っている。また、協調発振の条件も唇内の圧力と流速が非線形なことから解明が困難である。そのため、偏微分数値シミュレーションツール PSILAB を使用し管楽器シミュレータにおける唇発振モデルの分析を行い、スムーズな音の発振を実現する管体の条件を分析する。

2. 定式化

今回の音響管モデルは管壁の曲率を考慮した円筒座標系で実現した。管軸方向を z 軸、管径方向を r 軸とし、全ての現象がこの z 軸に対して軸対称性が保たれているとする。その場合シミュレーションに用いる方程式は r - z 平面に対して導出され、2次元問題に帰着できる。

以上の措置をとった場合、音波伝播方程式は空間2次元では次のように定式化される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \left(\Delta \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (1)$$

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

そして、PSILAB に入力する計算式は次のように変形される。 n は現ステップを表す。

$$\frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \left(\Delta \phi_n + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_n}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$v_{n+1} = -\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial z}, \quad u_{n+1} = -\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial r}, \quad p_{n+1} = \rho \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\Delta t}$$

Fig.1 は唇の振動を示した概略図である。簡略化のために、上唇と下唇が Fig.1 の水平軸について対象であると仮定している。そのため、上唇だけの駆動を考慮したモデルとなっている。

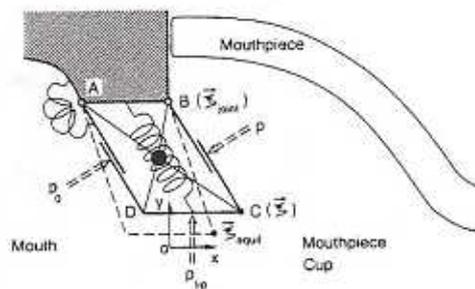


Fig.1 2次元唇モデル⁽¹⁾

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{mk}}{Q} \frac{d\xi}{dt} + F_{restore} + F_{\Delta p} + F_{Bernoulli} \quad (3)$$

$$F_{restore} = -\frac{1}{2} k (\xi - \xi_{equil})$$

$$F_{\Delta p} = b(p_0 - p) (\xi - \xi_{joint})^\perp$$

$$F_{Bernoulli} = b d p_{lip} e_y$$

この唇モデルの振動方程式、また唇付近の気流の式は(3)のように表される。 m は唇の質量、 k はステイフネス係数、 Q は特質係数、 b は唇が開いた時の幅(定数)、 e_y は y 方向の単位ベクトルである。は対象ベクトルに対して直交するベクトルを示している。

変位 ξ についての振動方程式(式(3)1行目)の左辺第1項は慣性項、右辺第1項は減衰項、第2項は点Cが静止状

態に戻ろうとする復元力(フックの法則で近似)、第3項は $p_0 - p$ が起因となる力、第4項は p_{lip} が起因となるベルヌーイ効果による外力を示している。次に、実際に共鳴管モデルに与えるのは流速であるため、式(3)の解である変位からそれを求める必要がある。以下に、唇の変位と流速、圧力との関係式を示す。

$$S_{lip} = \max\{2b\xi_y, 10^{-9}\} \quad (4)$$

$$U_{lip} = b \left\{ (\xi_x - \xi_{joint}) \frac{d\xi_y}{dt} - (\xi_y - \xi_{joint}) \frac{d\xi_x}{dt} \right\} \quad (5)$$

$$p_0 - p_{lip} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{U_{acoust}}{S_{lip}} \right)^2 + S_{lip} \frac{\partial U_{acoust}}{\partial t} \quad (6)$$

$$p_{lip} - p = -\rho U_{acoust}^2 \left(\frac{1}{S_{cup} S_{lip}} - \frac{1}{S_{cup}^2} \right) \quad (7)$$

$$U = U_{lip} + U_{acoust} \quad (8)$$

式(4)は唇の入口断面積 S_{lip} を求める式である。式(5)は、平行四辺形の座標の移動によって直接生み出される、空気流速 U_{lip} の式である。式(6)~(8)は唇モデルでの圧力と、マウスピースの中に流れ込む空気流速 U との関係を示した式である。唇を境として領域を2つに分け、唇内部側はエネルギー保存則、マウスピース側は運動量保存則を用いている。ここで S_{cup} は管入口の断面積を示す。管入口の圧力 p が、唇付近の流速 U_{acoust} の2次式になっており、この式こそが非線形の現象を生んでいる。これは唇モデル内で、奏者の強い息の吹き込みによる空気ジェット流が生じることを考慮しての定式化である。ただし、今回のシミュレーションでは、唇モデルだけを非線形とみなしている。但し、モデルの接合部分となっている管入口の境界に限っては、流速 U に関して非線形性があるとみなす。よって、式(6)~(8)の関係になっている。ちなみに式(6)(7)において、 p は共鳴管モデルの振動方程式から得られる管入口の圧力である。また唇モデルから得られた流速 U は、共鳴管モデルへの入力として使用される。つまり、共鳴管モデルのシミュレーション結果を唇モデルで使用し、逆に、唇モデルのシミュレーション結果を共鳴管モデルに使用することで、唇モデルと共鳴管モデルとの結合を実現させている。

ここで用いる共鳴管の音波伝播方程式は、円筒座標系で実現した2次元音波伝播方程式である。さらにこの式に先行研究で得られた減衰項を付加する。このシミュレーションは時間発展させるので、空間微分だけでなく、時間微分の離散化を施す必要がある。ここでは後方 Euler 法を用いて以下のように離散化した。

$$\frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \left(\Delta \phi_{n+1} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{D(z)} \sqrt{u_{n+1}} \quad (9)$$

$$u_{n+1} = -\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial z}, \quad v_{n+1} = -\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial r}, \quad p_{n+1} = \rho \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\Delta t}$$

ここで t は時刻、各変数に付いている添字は時間ステップ数、 α は減衰定数、 $D(z)$ は各 z 座標での管の直径である。

シミュレーション領域の形状は、Fig.2の(a)のモデルであり、寸法データの特徴点約250点から四辺形要素約249個を生成することで構成する。しかし、PSILABの領域数の制約のために、この構成は不可能である。そこでFig.2に示すように、特徴点をスプライン曲線で4点(スプライン曲線の構成点数下限値)ずつ結び、全ての特徴点の間に分割線が1本以上入るように要素分割を行うことで、理想の構成に代えることとした。ちなみに、実際のシミュレーション領域は円筒座標系を適用しているため、Fig.2(a)のように、管軸($r=0$)を中心に下半分が削除された形状となっている。これはパラメータ r が管の半径を示しており、 $r=0$ となることを避けるための処置である。

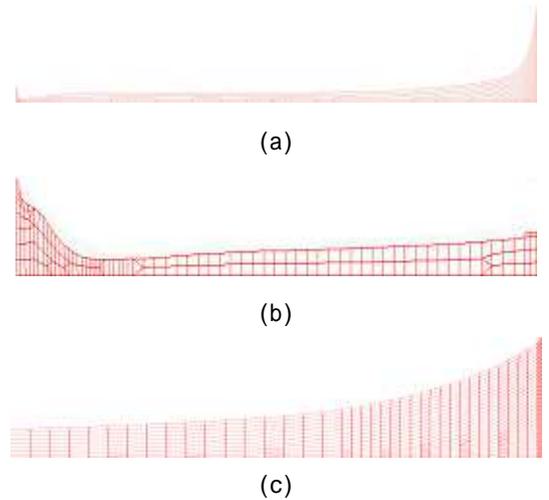


Fig.2 シミュレーション領域 (a)全体図 (b)入口部分拡大図 (c)出口部分拡大図

の境界条件を Table.1 に示す。管入口については唇モデルの流速を用いて連結をする。ここで ∇ は Gradient を示し、 n は境界に対する外向き単位法線ベクトルを示している。

Table.1 シミュレーションの境界条件

	管入口	管出口	管壁	管軸
ϕ	$n \nabla \phi = \frac{U}{s}$	$n \nabla \phi_n = \frac{1}{c} \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{\Delta t}$	$n \nabla \phi = 0$	$n \nabla \phi = 0$

管壁では、剛体で、粘性・熱放射を考慮せず、速度ベク

トルの方向が壁に沿うことを仮定してこの条件とした。また、共鳴管の形状が半分になったことで新たに現れた管軸付近の境界については、軸対称性から $n\nabla\phi = 0$ とした。管出口については、平面進行波による音の放射が起きていると仮定している。平面進行波の音圧と粒子速度の比が、常に空気密度と音速の積に等しいことを利用している。ただし時間発展をさせるので、式(9)の P_{n+1} を利用して変形させている。に付く添字は時間ステップ数を示している。つまり、管出口の境界条件は現在と1時間ステップ前の値を用いて定義するということになる。

出口音圧波形を計算する方法であるが、各時間ステップ内の計算の手順を以下に示す。

f_{lip} や p_0 などシミュレーション条件に沿った物理パラメータを設定後、前時間ステップの $p(t-1)$ 、 $p_{lip}(t-1)$ を用いて式(3)を解き、次時間ステップの変位 $\xi(t)$ を求める。

式(4)(5)より、 $S_{lip}(t)$ 、 $U_{lip}(t)$ を求める。

得られた現時間ステップの $S_{lip}(t)$ 、 $U_{lip}(t)$ と、前時間ステップの $p(t-1)$ 、 $U_{acoust}(t-1)$ を用いて式(6)(7)を解く。同時に式(8)より $U(t)$ を得る。 $U(t)$ を用いて、共鳴管モデルでの振動方程式を解く。これにより、現時間ステップの $p(t)$ と $U_{acoust}(t)$ を得る。

式(6)、あるいは式(7)から現時間ステップの $p_{lip}(t)$ を得る。

時間を1ステップ進めて、 $t+1$ に戻る。

ステップ n において、式(3)を離散化する必要があるが線形方程式における時間微分はこれまでと同様に後方 Euler 法で離散化している。実際に計算式で解く方程式は、以下の式(10)である。

$$\frac{1}{2} m \frac{\xi(t+1) - 2\xi(t) + \xi(t-1)}{(\Delta t)^2} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{mk}}{Q} \frac{\xi(t+1) - \xi(t-1)}{2\Delta t} + F_{restore} + F_{\Delta p} + F_{Bernoulli} \quad (10)$$

またステップ n について詳細に述べると、まず、式(6)と式(7)の時間微分項を離散化し、さらに2式を足し合わせて以下の式(11)を作る。

$$p(t) = p_0 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{U_{acoust}(t)}{S_{lip}} \right)^2 + \frac{\rho d}{S_{lip}} \frac{U_{acoust}(t) - U_{acoust}(t-1)}{\Delta t} + \rho U_{acoust}(t) \left(\frac{1}{S_{cup} S_{lip}} - \frac{1}{S_{cup}^2} \right) = F(U_{acoust}(t)) \quad (11)$$

この式(11)と気体の振動方程式 $p(t) = \text{Tube}(U_{acoust}, U_{lip})$ を連立し、Newton-Raphson 法を用いることで解くことができ、結果、 $U_{acoust}(t)$ と $p(t)$ が求められる。

3. シミュレーション結果

2次元唇モデルのパラメータ f_{lip} で示される唇振動数の変化により、第2モード以降の発振の条件を探ることとする。先行研究⁽²⁾⁽³⁾によって示された第2モードの f_{lip} である246Hzから、第3モード以降を発振させるため、350Hz、470Hz、590Hzと f_{lip} を増やし、残りのパラメータは寸法を計測したトランペットの固有周波数を参考にした値を用いてシミュレーションを行う。 f_{lip} のみの操作で発振しない音は、他のパラメータも操作した。操作したパラメータはTable.2に記した。

Table.2 各モードにおけるパラメータ

	f_{lip}	P_0	d	ピーク
第2倍音	246	2.00E-06	2.0	245
第3倍音	364	2.00E-06	2.0	353
第4倍音	485	3.00E-06	2.0	472
第5倍音	602	4.00E-06	2.0	589
第6倍音	716	5.00E-06	2.0	699
第7倍音	826	7.00E-06	1.6	835
第8倍音	938	7.00E-06	1.0	930

ピークとは、パラメータをもとに作成した出口音圧波形をフーリエ解析し、そのスペクトルがピークを示したときの周波数である。この実験において、トランペットの演奏に最低限必要な倍音のパラメータを解明した。次に、 f_{lip} の値と圧力の変化によってどのように音が変わるかをシミュレートした。結果をFig.3に示す。

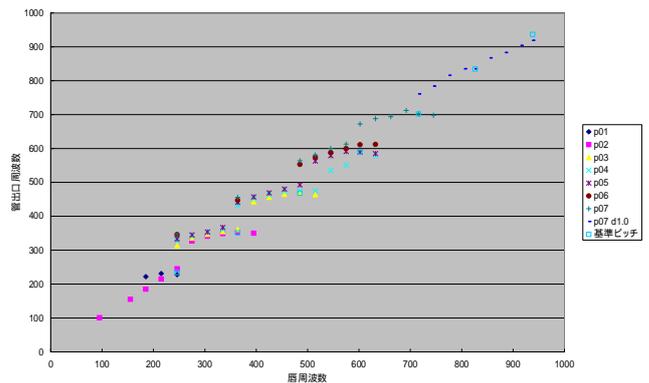


Fig.3 唇周波数と管出口周波数の関係(圧力変化による)

d の値を記入していないものは $d=2.0$ を入力し、シミュレーションを行った。Fig.3の結果から、 $p_0=7.0E-6$ の場合には $d=1.0$ の場合も計算した。それぞれの圧力において、グラフに点をとらなかった部分は、開始2000ステップ以内に発振が乱れ定常状態ではないと判断したものである。ただし $p_0=3.0 \sim 5.0E-6$ は第2倍音未滿、 $p_0=6.0 \sim 7.0E-6$ は第4倍音未滿、 $p_0=7.0E-6(d=1.0)$ は第6倍音未滿を切り捨て、計算は行っていない。例外として第2・3倍音に関

して $p_0=6.0 \sim 7.0E-6$ の場合も計算した。

実際に作成したこれらの波形が安定発振の状態かそうでないかを調べる。唇の駆動力は、唇の入口断面積 S_{lip} と圧力 P の複素数比の絶対値として表せることが分かっている。また、流量制御の力は、流量 U と S_{lip} で同じように表せるので、

$$G(f) = \frac{S_{lip}(f)}{p(f)} V(f) = \frac{U(f)}{S_{lip}(f)} \quad (12)$$

これらの値と入力インピーダンス Z_{in} との関係が、

$$|G(f)| |Z_{in}(f)| |V(f)| \geq 1 \quad (13)$$

$$\angle G(f) + \angle Z_{in}(f) + \angle V(f) = 0 \quad (14)$$

となれば、安定して発振したといえる。そこで Fig.3 の f_{lip} を第 4 倍音の 485Hz に合わせたときに発振した 5 音に対しこの式を当てはめ、安定発振しているかを調べた。結果を Table.3 に示す。

Table.3 安定発振状態の確認 ($f_{lip}=485\text{Hz}$)

p_0	ピッチ	Slip	p	U	$ G(f) $	$ Z_{in}(f) $	$ V(f) $	$ G(f) Z_{in}(f) V(f) $
3	472	1.96	1.50E-06	0.36	1304243	4.13E-06	0.19	1
4	475	3.27	2.58E-06	0.61	1268692	4.23E-06	0.19	1
5	493	4.21	2.97E-06	0.89	1417742	3.32E-06	0.21	1
6	553	5.13	4.93E-06	1.64	1040347	3.01E-06	0.32	1
7	564	6.12	6.14E-06	1.92	997450.5	3.19E-06	0.31	1

p_0	1周期	Gずれ	Z_{in} ずれ	Vずれ	G	Z_{in}	V	G+ Z_{in} + V
3	48	5	-10	5	0.65	-1.31	0.65	0
4	44	3	-7	4	0.39	-0.92	0.52	0
5	44	2	-4	2	0.26	-0.52	0.26	0
6	38	6	-11	5	0.79	-1.44	0.65	0
7	40	5	-10	5	0.65	-1.31	0.65	0

p_0 は 10^{-6} を省略した形で示している。上の表は式(13)に対応させた。絶対値に関しては息を吹き込み始めてから 20 周期後の各波形の振幅から式(12)の関係で求める。ピッチは既に Fig.3 で計測してある。一方、下の表は式(14)に対応させた。位相ずれに関しては G ならば $S_{lip}-p$ であるから、息を吹き込み始めてから 20 周期後のずれや周期をステップ数で数え、ずれを周期で除し 2 を掛けた。これは Z_{in} 、 V も同様の方法である。

4. 評価

(1)各倍音における評価

Table.2 を見ると、唇の周波数を共振周波数付近に近づけただけで満足できる結果が得られたのは第 3 倍音までであった。それ以降の倍音を発振させるため、主に吹き込まれる息の圧力の上昇が必要であることがわかる。また、第 7 倍音以降では、更に唇の厚さを薄くしなければ、求める音を満足に発振できないことが分かった。

(2)各倍音間における評価

Fig.3 では、前の実験の結果を受けて横軸に f_{lip} 、出音のピッチを縦軸に取った。各倍音間に新たに 3 点ずつ f_{lip} を指定し、圧力を $1.0E-6$ ずつ上げることで、各倍音間の発振音の変化がみられる。 d のパラメータに関して言えば、

$d=2.0$ の場合の安定領域は第 2~5 倍音と言うことが出来る。この要領で d の安定発振領域を数値的に求めることが出来るだろう。

(3)安定発振における評価

結果から見ればそれぞれの絶対値の積が 1 以上になっているため安定しており積が 1 であることから増幅の傾向はない。表を縦に見ると、圧力を高めることで唇断面積 S_{lip} 、圧力 p 、流速 U はその波形の振幅を高める。ピッチを確認すると、実音で第 4 倍音の 3B の周波数は 470 前後であるため若干高めだが $p_0=3.0 \sim 4.0E-6$ のときに、目的の音を出していると思われる $5.0E-6$ の場合は 493Hz と、半音の違いが出ている。 $p_0=6.0 \sim 7.0E-6$ の場合は 560Hz 前後であり、実音で言えば 4D であり第 5 倍音である 4D より半音低い。周波数依存性のある入力インピーダンス Z_{in} の値は各ピッチで近い値が出ており、ピッチが上がるほど値が小さくなるのは妥当な結果だといえる。唇駆動力 $G(f)$ は $5.0E-6$ の場合に最も大きく、流量制御力は圧力の上昇とともに上がる。唇駆動力、流量制御力に関しては、引き続き精査が必要である。一方 Table.3 の下の表は式(15)と対応させている。 $p_0=3.0 \sim 4.0E-6$ において、 Z_{in} が 3.0 と 4.0 の場合で大きく変わっている。

6. まとめ

トランペットの基本的な倍音に関して、ピッチをコントロールするためのパラメータを特定し、試行によって調整のための知見を得ることができた。また、シミュレーションによって作成した音が安定して発振していることを示すことができた。また、今回のシミュレーションには PSILAB を用いたが、このような偏微分方程式を用いた演算においては比較的簡素な記述で計算式や初期・境界条件を設定できる。一方、メッシュ分割の際、領域境で特異な分割になり意図した結果が得にくい⁽³⁾ことがある。

参考文献

- 1)S.Adachi, M.Sato: Time-domain simulation of sound production in the brass instrument, J.Acoust.Soc.Am.97, pp.3850-3861,1995
- 2)梅谷征雄, 梅村忠: トランペット音響管への流体方程式の適用(その 1), 日本音響学会音楽音響研究会資料 MA99-72, 2000
- 3)井上文博, 梅谷征雄: 偏微分ソルバ PSILAB による金管楽器シミュレーション, 日本計算工学会講演会論文集 6 巻 1 号, 2001,pp.389-392