

モード解析法による高速ピアノ響板シミュレータの開発

DEVELOPMENT OF HIGH-SPEED PIANO SIMULATOR USING MODE ANALYSIS METHOD

伊藤航¹⁾, 梅谷征雄²⁾

Wataru Ito and Yukio Umetani

1) 静岡大学 静岡大学情報科学研究科情報学専攻 (〒432-8011 浜松市城北3-5-1, gs06006@inf.shizuoka.ac.jp)

2) 工博 静岡大学教授 情報学部情報科学科 (〒432-8011 浜松市城北3-5-1, umetani@inf.shizuoka.ac.jp)

At present, direct transient analysis is used for the piano soundboard analysis in our research. But this analysis is low-speed for soundboard simulator. So, we tried soundboard analysis on the modal analysis. And by using a method modally expanding the vibration solution that is called a modal superposition method, and a method called space modal analysis method with the feature the external power can be arbitrary specified, we succeeded in achieving the speed-up of the soundboard analysis which enables the semi-real time sound generation.

Key Words: Soundboard simulator, Modal analysis method, Modal expansion analysis, Space modal analysis

1. はじめに

ピアノの音を物理モデルでシミュレーションにより生成する際、弦振動や響板の振動など、さまざまな要素を考慮に入れることが必要となる。特に響板の振動をシミュレートする際は、響板の複雑な形状を有限要素に分割して離散化し、そこから得られる数値モデルから振動方程式を得て解く必要がある。

現在我々は以上のことを踏まえた上でピアノ響板シミュレータを開発しているが、響板部の解析において使われている直接過渡解析法は計算量が多くピアノの響板の振動のシミュレートをするための十分な結果が実時間では得られない。そこで、響板の固有振動からシミュレーションを行うモード解析と呼ばれる手法を用いてピアノ響板振動の解析の高速化を図る。最終的には、実際のピアノのようなリアルタイムで音生成を行うシミュレータの開発を目指す。

2. 振動解析の解法

3次元響板モデルから数値モデルを組み立てる。組み立てた数値モデルに対して有限要素法を用いて空間離散化する。離散化された各要素が響板の各節点に対応しているので、数値モデルを解くことによって響板の振動を解析することができる。以下に具体的な解析方法を示す。

2.1 有限要素法による離散化と直接過渡解析法

3次元モデルの振動方程式を3次元弾性体の微分方程式から作成する。つりあい条件式、ひずみと変位の関係式、弾性法則(ひずみと応力)を展開して3次元それぞれについて

て方程式を組み立てる。以下の式はZ方向の振動方程式である。

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + r \frac{\partial w}{\partial t} - \bar{Z} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{E_x}{h} (v_{xz} + v_{xy} v_{yz}) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E_y}{h} (v_{yz} + v_{xz} v_{xy}) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{E_z}{h} (1 - v_{xy}^2) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ G_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ G_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \quad (2.1)$$

$\left(\begin{array}{l} \rho: \text{体積密度} \quad r: \text{減衰定数} \quad \omega: \text{変位} \quad \bar{Z}: Z \text{外力} \\ v_{xy} v_{yz} v_{xz}: \text{マイナーポアソン比} \quad G_{xy} G_{yz} G_{xz}: \text{せん断係数} \\ E_x E_y E_z: \text{ヤング率} \end{array} \right)$

(2.1)を変形後、Galerkin 式有限要素法による離散化を行ない、行列として表すと以下の式になる。

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R \frac{\partial u}{\partial t} + Ku = F \quad (2.2)$$

$$\left(\begin{array}{l} u: \text{振動解} \quad M: \text{質量マトリクス} \quad R: \text{減衰マトリクス} \\ K: \text{剛性マトリクス} \quad F: \text{外力ベクトル} \end{array} \right)$$

(2.2)を差分法を用いて連立方程式を解くことによって解 u^{t+1} を求める。従来のピアノシミュレータでは、上記の直接過渡解析法ではこの方法を用いられていたが、時間ステップごとに連立方程式を解く必要があり、計算時間が大幅にかかってしまうという問題点がある。この問題点を解決するために以下のモード重ね合わせ法を用いた振動解析を行う。

2.2 モード重ね合わせ法

モード重ね合わせ法は、外力を与えたときに起こる振動(一般解)が、外力の周波数に大きく依存する強制振動解と、物体固有の振動である自由振動解の重ね合わせによって表すことができると仮定する方法である。この考え方を使うことによって、(2.2)のような振動方程式を以下のように固有値解析(モード解析)によって解くことができ、計算量を大幅に減らすことができる。

$$u^t \text{を} u e^{i\omega t} \text{とし、外力項減衰項を} 0 \text{とすると(2.2)は、}$$

$$\omega^2 M u = K u \quad (2.3)$$

となり固有値問題に帰着する。

これを用いて自由振動と強制振動の解をモード分それぞれ足し合わせると、

$$w^t = \sum_j (d_j x_j e^{i\omega_f t} - c_j x_j e^{\frac{r}{2\rho} t} e^{i\frac{\sqrt{r^2 - 4\rho\lambda}}{2\rho} t}) \quad (2.4)$$

(w :振動解 d_j :強制振動モード係数 c_j :自由振動モード係数
 x_j :固有ベクトル r :減衰係数 ρ :体積密度 t :時刻 λ :固有値)

が成り立つ。強制振動モード係数 d_j は $t=0$ の時の(2.2)から、

$$d_j = \frac{F_i x_{ij}}{-(\omega^2 - \lambda) + i\alpha\omega} \quad (2.5)$$

と求めることができる。さらに、 $t=0$ の時、 $w^t=0$ であることから $c_j = -d_j$ となる。

この方法の利点は固有値問題さえ解決すればマトリクスを直接扱う必要が無いので、計算量を減らすことができる点である。さらに、直接過渡解析では、各時間ごとに前の時刻の値を使って計算を行うため、時間刻み Δt を大きくすると値が発散し正しい値が得られない。しかし、モード重ね合わせ法では前の時刻の値を使う必要が無いので、時間刻み幅を自由に設定することができ、その点でも、計算量を減らすことができる。また、直接過渡解析法ではシミュレーションを行うためにはすべての節点を解析する必要があるがモード重ね合わせ法では、任意の1点のみを解析することも可能である。

3. ピアノ響板への適用

3.1 2つの方法による結果の比較

前述した二つの解析方法による結果の比較、および計算時間の比較を行うため、実際のピアノ響板をモデルとしたシミュレーションを行った。ピアノ響板のモデルは実際のピアノに即したスケールや材料パラメータを元に有限要素法構造解析ソフト ANSYS を用いてモデル化、およびメッシングを行って得る。図3.1にメッシュした響板モデルを示す。

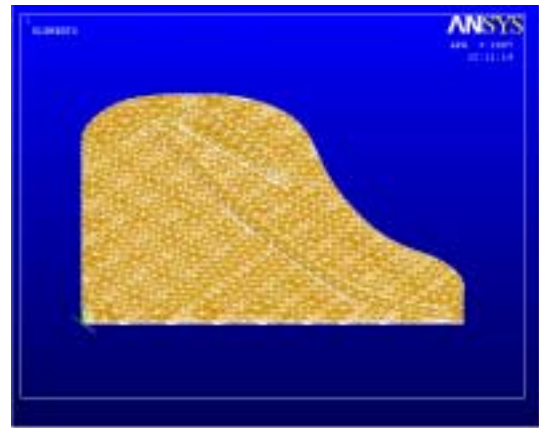


図3.1 シミュレーションで用いるピアノ響板モデル

このモデルに対して、1000Hz の cos 波を C4 弦に接する駒位置の部分に与えたときの振動を前述した直接過渡解析、モード重ね合わせ法の2つの方法で解析し、それぞれの計算速度を測定する。

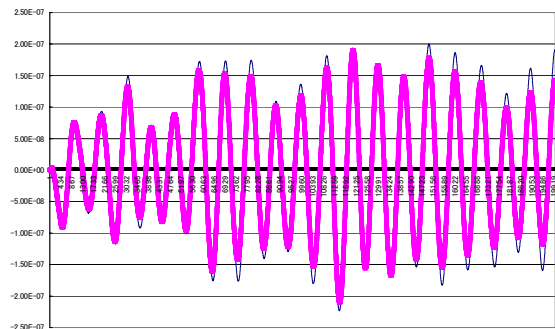


図3.2 直接過渡解析とモード重ね合わせ法の解析の比較
(外力1000Hz)

(太:直接過渡解析 細:モード重ね合わせ法)

表3.1 モード重ね合わせ法と直接過渡解析法の計算速度の比較

(響板モデル 4997 節点 CPU 2.0GHz メモリ 2.0GB RAM)

(時間ステップ/s)

	全節点	1節点のみ
直接過渡解析法	8.13×10^{-1}	
モード重ね合わせ法	1.52×10^{-1}	4.77×10^{-5}

図3.2の2つの解析方法から得た結果から、若干ずれが認められるが、これは直接過渡解析法の差分による誤差と考えられ、それを除けばほぼ結果が一致していると考えられる。

また、表3.1より2つの方法による計算時間の比較では1ステップごとの計算速度がモード重ねあわせ法のほうが速くなっている。さらに、モード重ね合わせ法では解析を1節点のみに限定することが可能で、これにより大幅な時間短縮になっていることがわかる。

3.2 モード重ねあわせ法の問題点

以上の結果から、モード重ねあわせ法は直接過渡解析法に比べて計算時間が短縮できることがわかった。しかしながら、モード重ねあわせ法では、外力は単振動の場合のみであり、時間ごとに変化する外力を与えることができないという問題点がある。つまり、弦振動のようなスペクトルを持つ倍音成分の周波数を持つ減衰振動を外力として与えることはできない。

そこで、この問題点を解決するために外力を自由に設定することができる、新たな振動解析方法である空間モード解析法を適用する方法を考えた。

4. 空間モード解析法を用いた響板振動解析

4.1 空間モード解析法の解法

モード重ねあわせ法と同様、有限要素法により空間離散化された振動方程式を変形してモード解析を行う。空間モード解析法は、モード解析によって得られた固有ベクトルは互いに直交であることから、モードごとの振動が容易に得られることを利用する方法である。全体の振動は、モード界に固有ベクトルをかけたものを足し合わせることで得られる。

ある時刻 t における変位 $\omega(t)$ が各モードごとの振動の足し合わせによって表せる、つまり、

$$\omega(t) = \sum_n \omega_n(t) x_n \quad (x \text{ は固有ベクトル})$$

で表すことができると仮定すると、(2.2)は

$$\sum_n M \frac{\delta^2 \omega_n(t)}{\delta t^2} x_n + \sum_n R \frac{\delta \omega_n(t)}{\delta t} x_n + \sum_n K \omega_n(t) x_n = F(t) \quad (4.1)$$

となる。

$R = rM$ (r は減衰係数) とし、(2.3)を代入すると、

$$\sum_n M \frac{\delta^2 \omega_n(t)}{\delta t^2} x_n + \sum_n rM \frac{\delta \omega_n(t)}{\delta t} x_n + \sum_n \lambda_n M \omega_n(t) x_n = F(t) \quad (4.2)$$

が成り立つ。

固有値解析の定義により、

$$(x_n, Mx_m) = 0 \quad (n \neq m)$$

となる直交性が成り立つので

$$(x_n, Mx_n) = 1$$

となるように x_n を決定し、 x_m で内積をとると、

$$\frac{\delta^2 \omega_m(t)}{\delta t^2} + r \frac{\delta \omega_m(t)}{\delta t} + \lambda_m \omega_m(t) = (f(t), x_m) \quad (4.3)$$

(ω_m : m モードの振動解 $f(t)$: 外力 λ_m : 固有ベクトル)

となり、これを差分法によって解くことによって ω_m が求まる。

この方法を用いることによって、時間によって変化する外力においても計算を行うことが可能となる。差分法を用いるため、モード重ねあわせ法の特徴である、 Δt を自由に設定できるという利点は失われたが、行列を扱わずに計算を行うので計算量が少なく、高速に計算が行うことができると予想される。

4.2 結果の検証

空間モード解析法による振動解析と直接過渡解析法による振動解析の結果の比較を行った。モデルの形状及び材質は、3.1項と同様である。外力条件は、3.1項と同様に1000Hzの外力をC4の駒一部分に与えた場合と、C1, C4, C7弦を実際に振動させた時に発生する力を与えた場合とし、それぞれモード重ねあわせ法と直接過渡解析法との比較を行った。

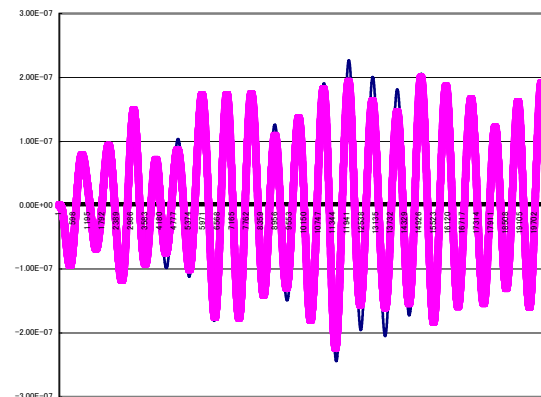


図4.1 モード重ねあわせ法と空間モード解析法の比較
(太:モード重ねあわせ法 細:空間モード解析法)

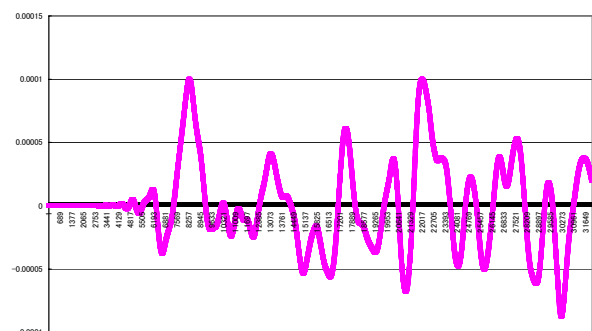


図4.2 C1弦を外力に与えた場合の響板振動変位
(太:直接過渡解析法 細:空間モード解析法)

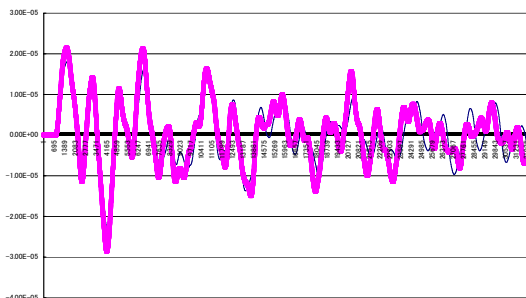


図 4. 3 C 4 弦を外力に与えた場合の響板振動変位
(太:直接過渡解析法 細:空間モード解析法)

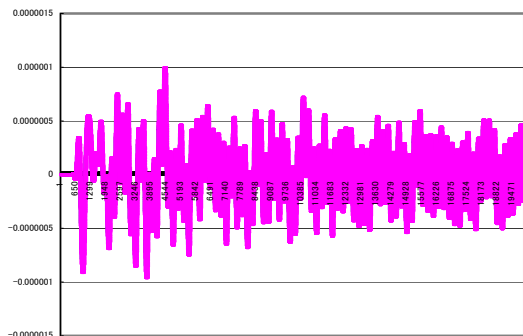


図 4. 4 C 7 弦を外力に与えた場合の響板振動変位
(太:直接過渡解析法 細:空間モード解析法)

図 4. 1 より、モード重ね合わせ法と空間モード解析法による振動解析の結果は一致している。さらに、図 4. 2 ～図 4. 4 より C 4、C 7 の条件の場合に前述した差分法による原因の誤差が若干認められるが、波形としてはほぼ一致していることがわかる。これら結果から、空間モード解析法による響板振動解析は正しい結果が得られていると考えられる

4. 3 計算速度の比較

空間モード重ね合わせ法とほかの 2 つの方法との計算速度の比較を行った。以下に同条件で測定した計算速度の比較を示す。

表 4. 1 3 つの方法による計算速度の比較
(響板モデル 4997 節点 CPU 2.0GHz メモリ 2.0GB RAM)
(時間ステップ/s)

	全節点	1 節点のみ
直接過渡解析法	8.13×10^{-1}	
モード重ね合わせ法	1.52×10^{-1}	4.77×10^{-5}
空間モード解析法	9.69×10^{-3}	1.60×10^{-4}

3 つの振動解析方法のうち、今回新たに導入した空間モード解析法が全節点を計算した場合、一番計算速度が速く、1 節点のみの場合も従来の解析方法である直接過渡解析に比べると速いことが分かる。

4. 4 計算時間の測定

実際に空間モード解析法を用いてピアノ音のシミュレーションにかかる時間を計測し表 4. 2 に示した。なお、計算時間をなるべく短くするために、あるモードが全体の振動にどのくらい寄与するかを決定するモード係数の式、(2.5)を評価関数として足し合わせるモードを選択して解析を行った。また、計算に使われる時間刻み幅 Δt は弦の解析時において発散しない最大の値を選択した。

表 4. 2 1 秒分析結果を得るのにかった時間

音階	モード数	サンプリング周波数	時間[s]
C1	16	33140	0.922
C2	15	30560	0.484
C3	10	53350	0.687
C4	12	80580	0.969
C5	12	235080	4.68
C6	17	140220	1.75
C7	15	129030	1.21

今回 1 秒分のデータの計測を行ったが、C 1 ～C 4 までは解析時間が 1 秒以内で行うことができ、リアルタイムなシミュレーションを行うことができたといえる。また、C 5 より高い音では、弦振動の解析時に Δt や Δx を小さくしなければならないので多少解析に時間がかかるが、最も遅い条件の場合でも 4. 6 8 秒と、それでも従来の方式と比べて格段に計算が速くできることがわかった。

5. まとめ

今回、空間モード解析法という新たな方法を用いてピアノ響板の振動解析を行い、結果的に計算速度が向上し高速化が図れた。振動データを音声化し音を鳴らすようにすることで、実際のピアノの様なインタフェースを作ることも可能となる。

しかしながら、今回の解析の条件は高速化のために、ピアノは本来一音につき 3 弦同時に振動するという仕様や、響板から弦への力のフィードバック、また、演奏者位置での振動の伝わり方などが考慮されていない。これらのことを考慮するためには、複数の条件の解析を行う必要があり、更なる高速化を図る必要がある。

参考文献

- 1) 池和恭,梅谷征雄：可視化対話型シミュレータ向けモード重ね合わせ機能の開発,第 8 回問題解決環境ワークショップ論文集,pp.42-45, 2005
- 2) 能崎友博, 梅谷征雄：可視化対話型 3 次元ピアノ響板モデルの開発,第 7 回問題解決環境ワークショップ論文集,pp.111-116,2004