

可視化対話シミュレータ向けモード重ね合わせ機能の開発

INTERACTIVE MODE ANALYSIS FACILITY FOR PIANO SOUNDBOARD SIMULATOR

池和恭¹⁾, 梅谷征雄²⁾

Kazuyuki Ike and Yukio Umetani

1)静岡大学 静岡大学情報科学研究科情報学専攻 (〒432-8011 浜松市城北3-5-1, cs0504@cs.inf.shizuoka.ac.jp)

2)工博 静岡大学教授 情報学部情報科学科 (〒432-8011 浜松市城北3-5-1, umetani@cs.inf.shizuoka.ac.jp)

We built an piano soundboard simulator based on modal analysis method, and designed the functions of visualization and conversational interface of the simulator. In this paper, we describe the feature of this system and the analysis on the cut-off effects of minor modes.

Key Words : Modal Analysis Method, Visualization ,Interfaces

1.はじめに

現在、コンピュータによる物理現象・工学現象のシミュレーションは、実験、理論に次ぐ第3の手法として活用されている。シミュレーションにおいて、われわれ人間が現象の振る舞いを直感的に把握できるようにするためには、効果的な視覚化を行うことが必要になる。しかし、扱うモデルが複雑化すると視覚化のために行われる計算量が飛躍的に増大し、またうまく視覚化できても、普通のやり方では現象を直感的に把握させるのは困難であると考えられる。

この点を踏まえ、本研究では、実形状ピアノ響板を対象モデルとし、有限要素法^[1]による離散化を行った後、これをモード解析^[2]することによって振動特性をいくつかのモードに分けて記述し、それらを視覚化することによって、振動の振る舞いを理解しやすくするシステムを構築することを目的としている。

2.物理モデルと有限要素法による離散化

今回モデルとして扱った対象は、以下のよう
に表される板振動方程式である。

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

Dは板の材料特性により決まる係数、 μ は板の密度である。これを有限要素法によって離散化する。

$$u = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad v = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

とおき、式(2.1)を変形すると以下ようになる。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{D}{\mu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

有限要素法では、三角形要素上で定義されるテ
ント型基底関数 $L_j(x,y)$ を用いる。

$$u = \sum_j u_j L_j(x, y) \quad (2.4)$$

$$v = \sum_j v_j L_j(x, y) \quad (2.5)$$

$$w = \sum_j w_j L_j(x, y) \quad (2.6)$$

と近似すると、式(2.3)は次のような連立一次方
程式に変換される。

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = -B_x \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = -B_y \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

ここで、

$$A = \begin{bmatrix} \int L_1 L_1 dx dy & \cdots & \int L_1 L_n dx dy \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int L_n L_1 dx dy & \cdots & \int L_n L_n dx dy \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$B_x = \begin{bmatrix} \int \frac{L_1}{\partial x} \frac{L_1}{\partial x} dx dy & \cdots & \int \frac{L_1}{\partial x} \frac{L_n}{\partial x} dx dy \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int \frac{L_n}{\partial x} \frac{L_1}{\partial x} dx dy & \cdots & \int \frac{L_n}{\partial x} \frac{L_n}{\partial x} dx dy \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$B_y = \begin{bmatrix} \int \frac{L_1}{\partial y} \frac{L_1}{\partial y} dx dy & \cdots & \int \frac{L_1}{\partial y} \frac{L_n}{\partial y} dx dy \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int \frac{L_n}{\partial y} \frac{L_1}{\partial y} dx dy & \cdots & \int \frac{L_n}{\partial y} \frac{L_n}{\partial y} dx dy \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

である。 n は節点数である。式(2.8)、式(2.9)、
式(2.10)を用いて式(2.3)を変形すると次のように
なる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} \end{bmatrix} = -\frac{D}{\mu} A^{-1} ((B_x + B_y) A^{-1} (B_x + B_y)) \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

3. モード解析

3.1 モード解析の理論^[2]

本研究では、板の振動を、複数のモード関数と呼ばれるものに分解し、それを個別に検証して材料特性がモードパターンに与える影響を調べたり、分解されたモード関数を重ね合わせて板の振動を再現したりできるようなシステムの構築を目指している。有限要素法による離散化で得られた、式(2.11)に対してモード解析を適用することを考える。

変位 w を時間の関数と考え、以下のように考える。

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = W(t) = \sum_l \begin{bmatrix} w_1^l \\ \vdots \\ w_n^l \end{bmatrix} e^{i\omega_l t} \quad (3.1)$$

これを式(2.11)に代入すると

$$-\sum_l \omega_l^2 W^l e^{i\omega_l t} = -\sum_l \frac{D}{\mu} A^{-1} (B_x + B_y) A^{-1} (B_x + B_y) W^l e^{i\omega_l t} \quad (3.2)$$

となる。これより、固有値問題

$$\omega_l^2 W^l = \frac{D}{\mu} A^{-1} (B_x + B_y) A^{-1} (B_x + B_y) W^l \quad (3.3)$$

を解析し、固有値 ω_l^2 と固有ベクトル W^l を定め

ればモードごとの固有値(固有周波数)、固有ベクトル(空間的な分布)を得られることになる。

3.2 モード解析の実装

上記の理論をもとに、実際の計算は式(3.3)をさらに変形させた形で行う。式(3.3)の両辺に行列 A を左からかけると

$$\omega_l^2 A W^l = \frac{D}{\mu} (B_x + B_y) A^{-1} (B_x + B_y) W^l \quad (3.4)$$

となる。これは一般化固有値問題の形になっている。行列 A は、式(2.8)より対称行列であることがわかる。そこで行列 A にコレスキー分解^[3]を適用すると、以下の形に変換できる。

$$A = LL^T \quad (3.5)$$

また、行列 A の逆行列は

$$A^{-1} = (LL^T)^{-1} = (L^T)^{-1} L^{-1} \quad (3.6)$$

となる。これより、式(3.4)は

$$\omega_l^2 LL^T W^l = \frac{D}{\mu} (B_x + B_y) (L^T)^{-1} L^{-1} (B_x + B_y) W^l \quad (3.7)$$

$L^T W^l = V^l$ とおき、式(3.7)の両辺に L^{-1} を左からかけると、

$$\omega_l^2 V^l = \frac{D}{\mu} K^2 V^l \quad (3.8)$$

となる。ここで、 $K = L^{-1} (B_x + B_y) (L^T)^{-1}$ である。

この固有値問題を解き、固有値 ω_l^2 と固有ベク

トル V^l を求める。その後、 $W^l = (L^T)^{-1} V^l$ によって固有ベクトル W^l を得ることになる。このように変形を行うことで、行列 K^2 が対称行列になるため、固有値を求めやすくなる。

ここまで変換したあとは、まず行列 K^2 にHouseholder 法^[4]を適用して3重対角行列に変換する。その後、陰的シフト付き QL 法^[4]を用いて固有値、固有ベクトルを算出する。

4. 検証

次のような2次元響板を対象にモード解析を行った。

形状：グランドピアノ響板(8 × 1420 × 1180)

要素数：347 節点数：204

材料特性：

- ・ ヤング率： 9.1×10^6 (kg/mm/S²)
- ・ ポアソン比：0.35
- ・ 密度：419 (kg/m³)

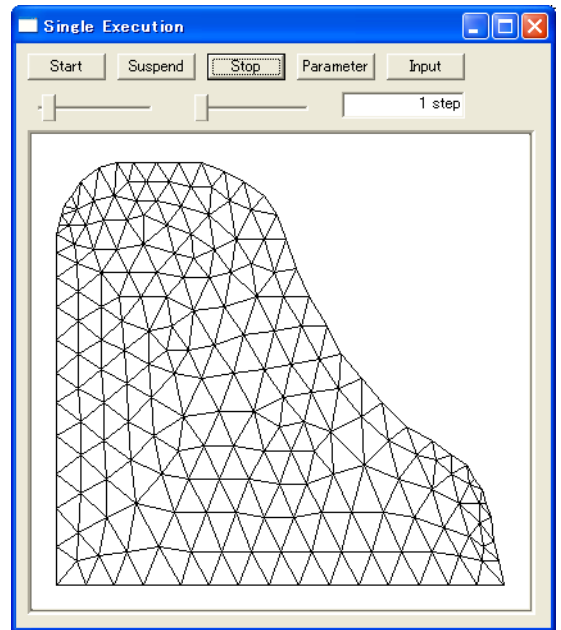


図1 解析に用いたモデルの形状

この形状データは市販のソフトウェアである ANSYS^[5]によって出力されたものである。データファイルは3つに分かれており、ひとつの三角形要素とそれを成している3つの節点の番号の関係を記述したファイル、節点の番号とそのXY座標の関係を記述したファイル、および境界上節点の情報を記述したファイルがあり、モード解析前にこれらを読み込む。

図2～図5にモード解析の結果を示す。丸が大きいほど、大きな値を持つベクトルであることを示す。

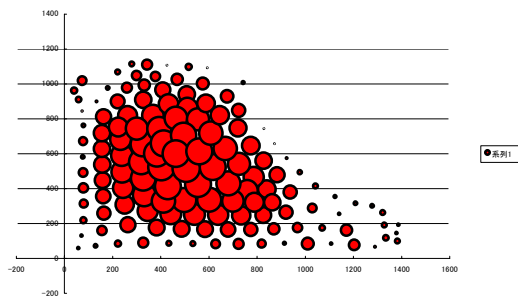


図2 第1モードのベクトル分布
(固有周波数：15.479Hz)

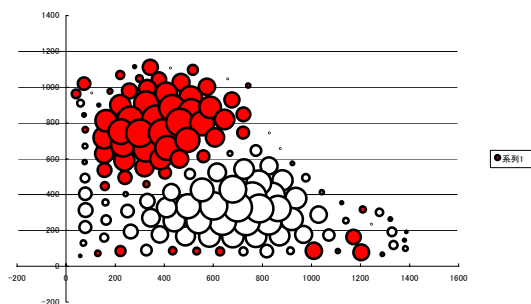


図3 第2モードのベクトル分布
(固有周波数：32.677Hz)

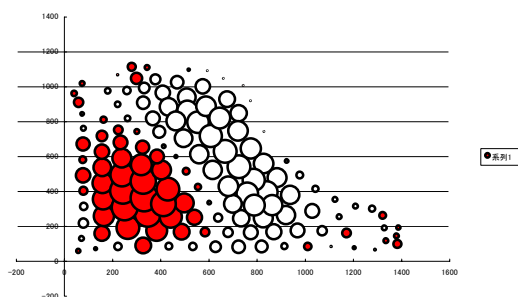


図4 第3モードのベクトル分布
(固有周波数：39.862Hz)

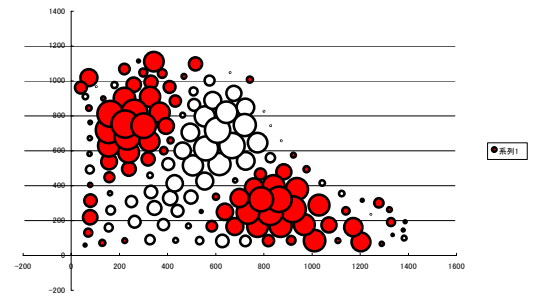


図5 第4モードのベクトル分布
(固有周波数：55.294Hz)

モードパターンを出力した結果、従来 ANSYS で得られたベクトルの分布^[5]とおおまかに一致することが確認できた。ただし、従来得られたデータに比べ、各モードにおける固有周波数に違いが見られる結果となった。式(3.3)などからもわかるように、固有周波数は固有値解析の影響を大きく受けるため、固有値を求めるメカニズムやその精度に何らかの違いがあったためではないかと考えられる。

5. 今後の課題とまとめ

まず、固有値解析のメカニズムを改善する必要があると考えられる。具体的には、信頼性の高い外部のライブラリを取り入れ、それを用いて計算し、改めて ANSYS の出力との比較を行っていく。

次に、時間発展シミュレーションの機能を設けて、時間経過に伴う振動の様子を検証する。これは、従来の手法である直接過渡解析^[6](時間差分を利用したシミュレーション)の出力と比較をして、シミュレータの妥当性を評価する。

またモード重ねあわせ法を用いたシミュレーションの場合、視覚化の方法が重要である。たとえば各モード関数ごとの時間発展シミュレーションや、モードのベクトルパターン自体を出力するなど、モード解析に適した視覚化を実現できるメカニズムやインターフェイスを実装する。これにより、材料パラメータの変更によりモードパターンがどのように変化するかなどといった検証を可能にする、利便性の高いシミュレーションシステムを目指す。

付録

参考文献

- [1] 菊池文雄、「有限要素法概説」、サイエンス社、pp57-76(1999年)

[2]近藤恭平、「工学基礎 振動論」, 培風館、
pp195-210(1993 年)

[3]大野豊他、「新版 数値計算ハンドブック」, オーム社、pp131-132(1990 年)

[4]William H. Press 他、「NUMERICAL
RECIPES in C」, 技術評論社、pp351-364(1994
年)

[5] 柘植敦司他、“ANSYS におけるピアノ響
板シミュレーション”、日本計算工学会講演
論文集 Vol.7 No.1 pp83-86

[6] 梅谷征雄他、“楽器研究 PSE(Problem
Solving Environment)の開発に向けて”、情
報学ワークショップ(2003 年)