

可視化対話型ギター弦シミュレータの開発

Development of Visual/Interactive Guitar String Simulator

稲吉健¹⁾, 梅谷征雄²⁾

Ken INAYOSHI¹⁾, Yukio UMETANI²⁾

1) 静岡大学 情報学研究科情報学専攻 (〒432-8011 浜松市城北 3-5-1, cs8007@cs.inf.shizuoka.ac.jp)

2) 工博 静岡大学教授 情報学部情報科学科 (〒432-8011 浜松市城北 3-5-1, umetani@cs.inf.shizuoka.ac.jp)

In this research, the pronunciation mechanism of a guitar string is modeled by one dimensional differential equation. The simulation of it is carried out by computer, based on surveyed parameter values, and the sound is generated using computed results. The waveform obtained as a result is analyzed and the characteristic of the mechanism of the pronunciation of a guitar string is investigated. The construction of the simulator is also described.

Key Words : guitar string, simulation, differential equation.

1. はじめに

現在コンピュータによる物理現象・工学現象のシミュレーションは、実験・理論に次ぐ第3の手法として活用されている。シミュレーションは、実験で観測の難しい量の情報を得るためには有効な手法であるとされている。本研究ではギター弦の発音機構を微分方程式でモデル化し、それをコンピュータでシミュレートし、それぞれの実測に基づく定数を入れて計算し、楽音を合成する。その結果得られる波形を分析して、ギター弦の発音の機構と音との特性を調べる。

2. 方法

ギター弦の微分方程式により定式化し計算機上の数値シミュレーションにより動作を再現する。

弦の1次元振動の方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\kappa^2 ES}{\sigma} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (2.1)$$
$$- 2b_1 \frac{\partial y}{\partial t} + 2b_3 \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + f(x, x_0, t)$$

弦に関するパラメータは次の通りである。

y : 弦の変位, σ : 線密度, T : 張力,

E : ヤング率, S : 弦断面積,

κ : ジャイレーション半径, b_1 : 減衰係数,

b_3 : 減衰係数, f : 外力項

右辺第3項、第4項に現れる b の項は減衰に関するもので、以下で与えられる周波数に依存した減衰率 d を表している。

$$d(\omega) = b_1 + b_3 \omega^2 \quad \omega : \text{角周波数}$$

弦の両端は支持されているものとし、境界条件は次式で与える。

$$y(0, t) = y(L, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

時間的にはサンプリング周波数 f で、空間的には全長 L の振動体を N に等分割する。

(図 - 1 参照)



図 - 1 有限差分法のためのモデル化

3.1 有限差分法について

(1) 離散化

(2.1)で示した物理モデルを計算機上で実現するためには、数値解法を用いて離散化する必要があり、本研究では離散化のための数値解法として、有限差分法を用いる。差分法とは、微分方程式の数値解法の1つであり、微分項をその近似差分で置き換えて差分方程式を作り、それを解いてもとの微分方程式の解を得る方法である。近似差分はテーラー定理を用いることにより導くことができる。例えば関数 $u(x)$ が1価有限連続関数の時はテーラーの定理より

$$u(x+h)=u(x)+hu'(x)+\frac{1}{2}h^2u''(x)+\frac{1}{6}h^3u'''(x)+\Lambda \quad (3.1)$$

$$u(x-h)=u(x)-hu'(x)+\frac{1}{2}h^2u''(x)-\frac{1}{6}h^3u'''(x)+\Lambda \quad (3.2)$$

この辺々を加えると、

$$u(x+h)+u(x-h)=2u(x)+h^2u''(x)+O(h^4) \quad (3.3)$$

右辺第3項の $O(h^4)$ は充分小さいとして無視して整理すると

$$u''(x)=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x} \quad (3.4)$$
$$\equiv \frac{1}{h^2}\{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)\}$$

これが2階微分の差分近似式(差分商)となる。このときの右辺の主要誤差は h^2 の程度と

なる。

また、式(3.1)と式(3.2)の差をとると

$$u(x+h)-u(x-h)=2hu'(x)+O(h^3) \quad (3.5)$$

これを先程と同様に整理すると

$$u'(x)=\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x} \quad (3.6)$$
$$\equiv \frac{1}{2h}\{u(x+h)-u(x-h)\}$$

これが1階差分の中央差分近似式(中央差分商)となる。また1階差分の差分近似には前進差分近似と後退差分近似があり、前進差分近似は、

$$u'(x)=\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x} \quad (3.7)$$
$$\equiv \frac{1}{h}\{u(x+h)-u(x)\}$$

また後退差分近似は

$$u'(x)=\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x} \quad (3.8)$$
$$\equiv \frac{1}{h}\{u(x)-u(x-h)\}$$

となる。主要誤差は中央差分近似が h^2 の程度、前進差分近似と後退差分近似は共に h となる。

高階の差分商については「差分商の差分商」「そのまた差分商」...という形で定義することが可能である。

(2) 解法

初期値問題については、初期条件をもとに次の時点での状態を求め、それをもとに次の状態を求める、という具合に順に進めて値を求めることができる。その中で、次の時点での値を1つだけ含むもの、つまり未来の値を求めるのに現在・過去の値だけに依存し、未

来の値には依存しないものを陽公式といい、次の時点での値を2つ以上含むもの、つまり未来の値を求めるのに他の未来の値を必要とするものを陰公式という。陽公式は次の値を個別に素早く計算ができるが、安定性を維持するためにメッシュサイズに制限を受ける。反対に陰公式では連立方程式を解かなければならないが、安定性は保証されている。境界条件の処理など個々の問題ごとに特殊事情があるので、問題ごとに解法を考えてプログラムを作る必要がある。

3.2 物理モデルの離散化 弦モデルの離散化

有限差分法を用い、弦の1次元振動の方程式を離散化する。このとき差分近似は中央差分を、解法には陽公式を用いる。時間においてはサンプリング周波数 f で分割し、空間においては全長 L の振動体を N に等分割する。それらを次のように定義しておく。

$$\Delta x = L/N \quad \Delta t = 1/f$$

$$y(x, t) = y(i\Delta x, n\Delta t) = y(i, n)$$

このように定義することで、例えば空間についての2階差分においては次のように近似される。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y(i+1, n) - 2y(i, n) + y(i-1, n)}{\Delta t^2}$$

式(2.1)に差分式を適用すると次の計算式が得られる。

$$\begin{aligned} y(i, n+1) = & A_1 y(i, n) \\ & + A_2 y(i, n-1) \\ & + A_3 [y(i+1, n) - y(i-1, n)] \\ & + A_4 [y(i+2, n) - y(i-2, n)] \\ & + A_5 [y(i+1, n-1) + y(i-1, n-1) + y(i, n-2)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

ここにおいて係数 $A_1 \sim A_5$ は以下のようになる。

$$A_1 = \frac{1}{D} \left(2 - 2 \frac{T}{\mu} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{b_3}{\Delta t} - 6 \frac{\kappa^2 SE}{\mu} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{D} \left(-1 + b_1 \Delta t + 2 \frac{b_3}{\Delta t} \right)$$

$$A_3 = \frac{1}{D} \left(\frac{T}{\mu} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + 4 \frac{\kappa^2 SE}{\mu} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} \right)$$

$$A_4 = \frac{1}{D} \left(\frac{b_3}{\Delta t} - \frac{\kappa^2 SE}{\mu} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} \right)$$

$$A_5 = \frac{1}{D} \left(-\frac{b_3}{\Delta t} \right)$$

$$D = 1 + b_1 \Delta t + 2 \frac{b_3}{\Delta t}$$

弦を振動(励起)させる外力項に関してはある1点に変位を与えることにより実装した。

また境界条件は次式で与えられる。

$$y(0, n) = y(N, n) = 0$$

$$y(-1, n) = -y(1, n)$$

$$y(N+1, n) = -y(N-1, n)$$

4. シミュレータの機能

現在実装できているシミュレータの機能

弦の動きの可視化

任意の点での変位のファイル出力

任意のパラメータ入力の反映(入力

可能なパラメータは弦の張力、線密

度、弦の中心断面積、ジャイレーシ

ョン半径、ヤング率、弦長、減衰係

数 b_1 、 b_3 、分割数、打弦相対位置、
入出力相対位置)

・ 相対位置について

相対位置は弦長 L / 分割数 * n という値
を用いる。

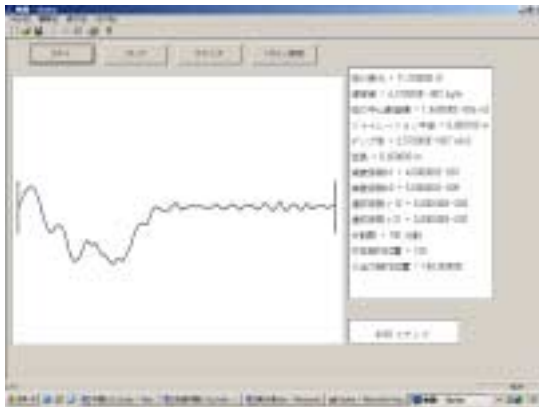


図 - 2 シミュレータの実行画面

5 . 結果

本研究ではまずエレクトリックギターのパickaアップの搭載位置に注目して、出力位置を
変化させ、どのような影響が出るかを音色、
波形、スペクトルから調べた。

・ 入力したパラメータ

弦の張力 $T = 71.7 \text{ N}$

線密度 $\rho = 6.31 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$

弦の中心断面積 $S = 1.46 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

ジャイレーション半径 $k = 10 \times 10^{-4}$

ヤング率 $E = 35.7 \text{ GPa}$

弦長 $L = 0.65 \text{ m}$

減衰係数 $b_1 = 0.4$

減衰係数 $b_3 = 5 \times 10^{-9}$

分割数 = 150

打弦相対位置 = 20

出力相対位置 = 10、20、30

・ 音色の違い

wav ファイルに変換し、視聴したところ相
対位置が少ない(よりブリッジに近い)方が
硬い音色になり、相対位置が大きい(ブリッ
ジから遠い)方が丸い柔らかい感じの音色に
なった。

・ スペクトルによる違い

ブリッジに近い方が高周波数の成分を多く
含んでいることが分かった。これによって聞
いたときに“硬い”といった印象を与えるの
だと思われる。(図 - 3,4,5 参照)

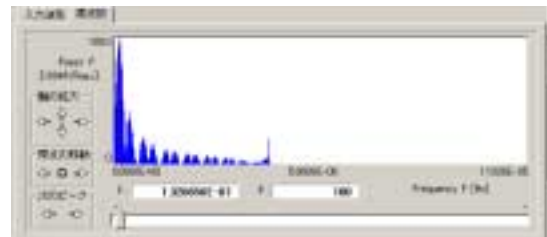


図 - 3 相対位置 10 でのパワースペクトル

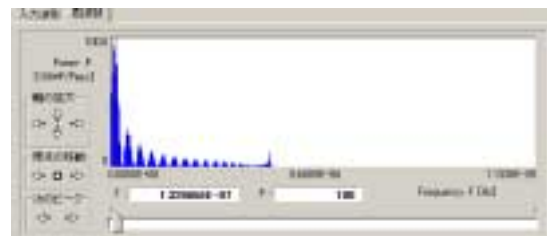


図 - 4 相対位置 20 でのパワースペクトル



図 - 5 相対位置 30 でのパワースペクトル

・ 波形の違い

ブリッジに近い方が減衰が早いことが見られ
た。この原因は現在調査中である。(図 -

6,7,8 参照)

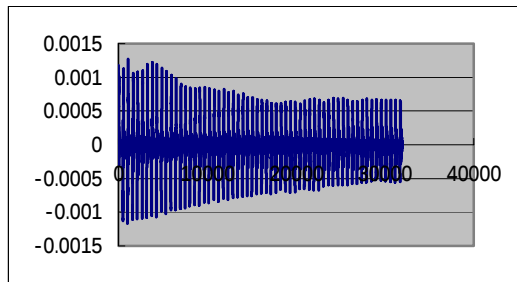


図 - 6 相対位置 10 での時系列波形

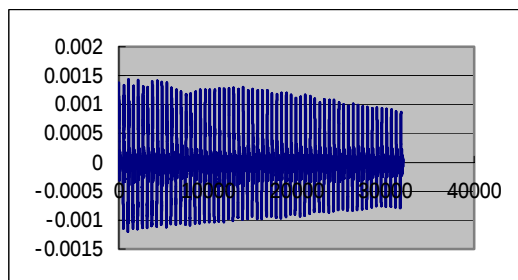


図 - 7 相対位置 20 での時系列波形

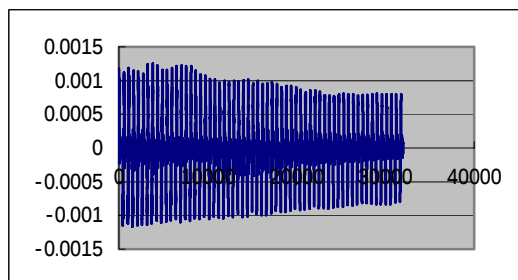


図 - 8 相対位置 30 での時系列波形

6 . シミュレータの構成法

シミュレーションによって物理現象を解明するためには、次の 6 つの作業が必要となる。

物理現象の解析

物理モデルの作成

数値解法の離散化

実装

シミュレーションの実行

評価

新規にシミュレータを作成しようとする時、

～ の作業は非常に煩雑で、作業負荷が大きい。そこで既存の可視化対話型平板シミュレータをもとにシミュレータ作成における作業負荷の軽減を模索した。図 - 9 に既存の可視化対話型平板シミュレータの画面を示す。

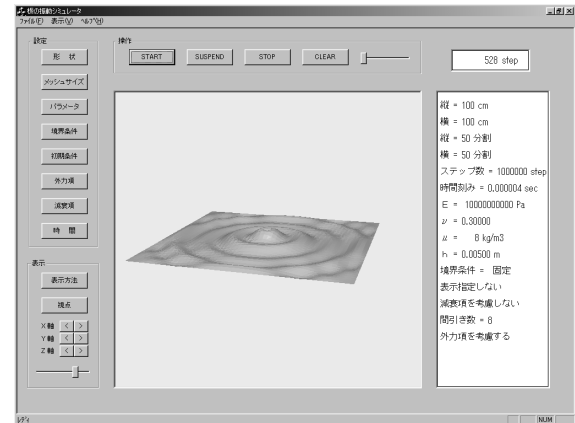


図 - 9 可視化対話型平板シミュレータ

また図 - 10 にシミュレーション実行管理部分と物理シミュレータ部分の流れ図を示す。

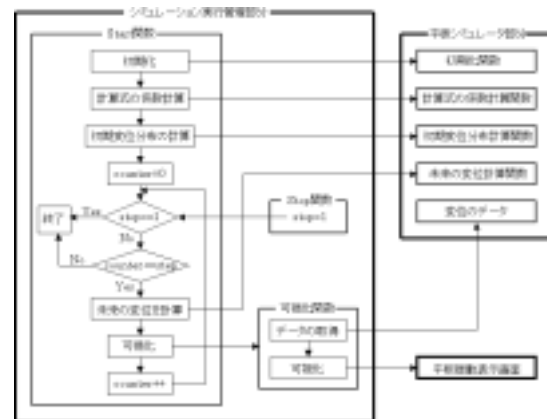


図 - 10 シミュレーション実行管理部分と物理シミュレータ部分の流れ図

本研究では図 - 10 のシミュレーション実行管理部分と物理シミュレータ部分の流れ図の、物理シミュレータ部分の計算関数を書き換えることで実装した。これによって前述の物理現象の解析、物理モデルの作成、数値解法の離散化は行わなければならないが、実装の段

階では大幅な負荷の軽減ができた。

結果として既存の可視化対話型平板シミュレータの実装過程では1年近くかかっているのに対し、本研究では離散化に半年、実装に3ヶ月作業時間も短縮することができた。

6. 今後の課題

このモデルを用いて分析できるパラメータをまとめると次のようになる。

- ・ 出力位置の影響
- ・ 構造の影響（質量、長さなど）
- ・ 材質の影響（減衰係数、ヤング率など）

上の3点の内、出力位置の影響については調べることができた。したがってこれからの課題として、構造の影響、材質の影響などを調べる必要がある。

また、よりギター弦のシミュレートに近いものに仕上げるために、このモデルの精度をより上げる必要がある。そのための課題としては以下の点が挙げられる。

- ・ 2次元モデルへの拡張
ブリッジに対して垂直方向の変位の表示と、互いの連成を表現する。
- ・ 外力項（励起）のモデル化
現在は暫定的に変位を与えているので弦を振動させる外力項の物理モデル化と実装する。
- ・ 実際のギターでのデータ・音色との整合性と比較の検証
実測したものとシミュレーションで得られたデータとの比較する。

- ・ 描画のちらつきの修正
現時点では描画にちらつきが見られるので、その改善。
- ・ その他 GUI 部分の実装
実行を止めるストップ、一時停止するサスペンド、といった機能を実装する。

参考文献

- 1) 吉澤友孝、徳弘一路、大井聖也、高澤嘉光、山家清彦 “基本奏法に対するギター弦の2次元振動計測とシミュレーション”、日本音響研究会資料 Vol.21 No.1
- 2) 水島二郎、柳瀬槇一郎 “理工学のための数値計算法” 発行 数理工学社 発売 サイエンス社 (2002)
- 3) 橋本智樹 “ピアノ音の物理シミュレーションの研究” (1998)
- 4) 菊池文雄 “有限要素法概説” サイエンス社 (1980)
- 5) 吉川茂、藤田肇 “基礎音響学 振動・波動・音波” 講談社サイエンティフィク (2002)
- 6) G.D.スミス著 藤川洋一郎訳 “電算機による偏微分方程式の解法” (1971)
- 7) Neville H.Fletcher, Thomas D.Rossing “The Physics of Musical Instruments